

Alexander Lünenschloß

## **Semiaktive Regelung durch Reibung**



# **Semiaktive Regelung durch Reibung**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur  
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Alexander Lünenschloß  
aus Hamburg

Berichterstatter: Prof. Dr./Univ. de São Paulo Peter Hagedorn  
Mitberichterstatter: o. Prof. Dr.-Ing. habil. Lothar Gaul

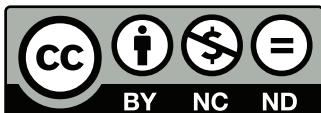
Tag der Einreichung: 30. Juni 2009  
Tag der mündlichen Prüfung: 7. September 2009

Darmstadt 2009

D 17

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,  
E-Publishing-Service der TU Darmstadt.  
URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als  
URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-19987  
URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/1998>



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:  
Namensnennung-Keine kommerzielle Nutzung-Keine Bearbeitung 2.0 Deutschland  
URL: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

# Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Fachgebiet Dynamik und Schwingungen des Fachbereichs Mechanik, später Maschinenbau, an der Technischen Universität Darmstadt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die bei der Anfertigung dieser Arbeit Hilfe geleistet haben. Das gilt besonders für Herrn Prof. Dr. Peter Hagedorn, der das Thema dieser Arbeit angeregt und die Arbeit wissenschaftlich begleitet hat. Er hat es mir ermöglicht, selbständig zu arbeiten und war zu jedem Zeitpunkt ein wertvoller Ideengeber und Ansprechpartner. Auch Herr Prof. Dr. Lothar Gaul hat einen großen Teil beigetragen, denn das Original der hier untersuchten Reibleiste stammt aus seinem Institut an der Universität Stuttgart. Viele seiner Ideen haben die Grundlage zu dieser Arbeit gebildet, und ich danke ihm herzlich für die Übernahme des Korreferats. Herrn Prof. Dr. Richard Markert danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Während der Arbeit haben mir besonders Herr Prof. Dr. Werner Krabs, Herr Dr. Lars Schewe und Herr Dr. Jens Becker weitergeholfen. Ich danke auch meinen Studienarbeitern, die mit Ihren Ideen und Ihrem Einsatz zu dieser Arbeit beigetragen haben. Nicht zuletzt möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Klaus Knothe bedanken, der mich mit seinen Anregungen und seiner persönlichen Unterstützung zum wissenschaftlichen Arbeiten geführt hat.

Für das angenehme Arbeitsklima und die Unterstützung danke ich meinen Kollegen aus der Arbeitsgruppe Dynamik und Schwingungen, Gottfried Spelsberg-Korspeter, Daniel Hochlenert, Steffen Wiendl, Florian Fischer, Martin Schönecker, Ana Costa-Conrado, Tobias Vomstein, Himanshu Verma und Oleg Kirillov, den Kolleginnen und Kollegen aus der Arbeitsgruppe Strukturdynamik, und vor allem auch Renate Schreiber und Maria Rauck.

Meiner Familie, meinen Freunden und vor allem Luisa bin ich sehr dankbar für ihr Verständnis und die Unterstützung während der Anfertigung dieser Arbeit.



## Kurzfassung

Diese Arbeit behandelt die semiaktive Regelung von geschichteten Balken, die zeitlich durchgehend im rauen Kontakt zueinander stehen. Bei technischen Systemen tritt häufig ein Großteil des unbeabsichtigten mechanischen Energieverlustes an Verbindungs- und Fügestellen auf. Dazu gehört die Dissipation an rauen Verbindungsflächen. Diese wird teilweise bewusst eingesetzt, unter anderem bei der Lagerung von Turbinenschaufeln, Schraubenverbindungen in Raumfahrt-Strukturen und verschraubten Balken im rauen Kontakt. Diese Reibleisten bilden ein interessantes Beispiel für mechanische Systeme, in denen mehrere raue, zeitlich ununterbrochene Kontakte auftreten.

Voraussetzung für die semiaktive Regelung von Reibleisten ist das Verständnis ihres dynamischen Verhaltens bei passiver Dämpfung durch Reibung. Deshalb werden verschiedene mechanische Modelle für Reibleisten aufgestellt. Der raue Kontakt zwischen den Balken führt dabei zu unilateralen Zwangsbedingungen. Die zugehörigen Zwangskräfte kommen dann nicht aus einer expliziten Gleichung, sondern müssen ein System von Gleichungen und Ungleichungen erfüllen, sogenannte komplementäre Nebenbedingungen. Diese führen auf Optimalitätsprobleme, die diese Arbeit in allgemeiner Form herleitet. Es treten zwei unterschiedliche Fälle auf. Wenn die Normalkräfte in den Kontakten bekannt sind, führt dieses auf ein quadratisches Minimierungsproblem (QP). Wenn die Normalkräfte während der Rechnung unbekannt sind und Gleiten auftritt, muss eine Erweiterung des QP verwendet werden, ein lineares Komplementaritäts-Problem (LCP). Es wird gezeigt, dass Zwangskräfte allgemein aus Optimierungsproblemen berechnet werden können.

Ziel der Arbeit war unter anderem die Herleitung von Bewegungsgleichungen aus diskretisierten Kontinua mit rauem Kontakt im Rahmen von Minimalmodellen. Diese beinhalten nur wenige Freiheitsgrade und haben den Vorteil einer übersichtlichen Verifizierung von Annahmen, die zu dem untersuchten System bestehen. In der Untersuchung von Strukturen mit komplizierter Geometrie mittels finiten Elementen bilden Minimalmodelle häufig eine notwendige Vorstufe, um ein grundsätzliches Verständnis für das technische System zu gewinnen. Für die Reibleiste werden nun verschiedene Minimalmodelle hergeleitet, die höchstens 20 Freiheitsgrade beinhalten.

Eine semiaktive Regelung verändert durch Stellkräfte die Normalkräfte in den Kontakten, so dass die Reibkräfte eine möglichst hohe Dissipationsleistung verrichten. Wenn diese Normalkräfte direkt vorgegeben werden können, zeigen Ergebnisse von Rechnungen, dass die Dissipationsleistung weit über der passiver

Dämpfung liegt. In verfeinerten Modellen der Reibleiste hängen die Normalkräfte jedoch auf dynamische Weise mit den Stellkräften zusammen. In diesem Fall ist die Einführung eines LCP für die Berechnung der Normalkräfte in den Reibkontakten notwendig. Um Abheben in den Kontaktpunkten zu vermeiden, muss für jede Stellkraft eine untere Schranke bestehen. Diese führt in dem untersuchten Regelungskonzept dazu, dass auch im geregelten Fall Haften auftritt. Trotzdem war die Dissipationsleistung der semiaktiv geregelten Systeme über der der passiv gedämpften. Es ist also in allen untersuchten Fällen vorteilhaft, für die Dissipation von Schwingungsenergie semiaktive Regelungen einzusetzen.



# Abstract

This work deals with semiactive control of layered beams, who stay in contact. In technical systems the major part of unwanted dissipation takes place at joints and bearings. Friction due to rough contact can contribute to this. Sometimes this effect is used by purpose. Examples are bearings of turbine blades, joints in space structures and also layered beams. Layered beams form an interesting example, representative for mechanical systems with a set of rough, uninterrupted contacts.

A precondition for the semiactive control of layered beams is the understanding of its passive behavior under friction forces. For this reason a series of models is introduced. Rough contact leads to unilateral constraints. In this case the associated forces do not fulfil a set of equations, but a combination of inequalities and equations, so-called complementary constraints. They lead to optimization problems that will be investigated for a general case. The general problem depends on the knowledge of the normal forces. If they are already known, the computation of the tangential forces leads to a quadratic minimization problem (QP). If the normal forces are not known and sliding surfaces appear, the computation leads to a linear complementarity problem (LCP). Generally, the calculation of constraint forces can be formulated as an optimization problem.

A part of this work deals with minimal models, originating from discretized continua with rough contact. By definition they contain few degrees of freedom and they admit a basic analysis of a technical system on a low level of complexity. Before details are taken into consideration, minimal models are often a good starting point of an analysis. In this work, different minimal models for the system of layered beams are introduced, that contain maximal 20 degrees of freedom.

In the presented system the actuating forces of the semiactive control change the normal forces. This influences the friction forces, which can be used to increase dissipation. If the normal forces can be actuated directly, simulation results show, that the dissipation increases in comparison to the passive case. In refined models the normal forces depend dynamically on the actuator forces. In this case the calculation of the normal forces requires the solution of a linear complementarity problem at every instant. Here it is necessary to bound the actuator forces from below to exclude lift-off. This can lead to sticking contacts, but the resulting dissipation still exceeds the passive case. In all cases, that have been investigated, it was advantageous to dissipate vibration energy by semiactive control.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Thema der Arbeit	1
1.2 Stand der Technik und Literatur	2
1.2.1 Semiaktive Regelung	2
1.2.2 Kontaktmechanik	3
1.2.3 Finite Elemente und Mehrkörpersysteme	3
1.2.4 Dynamische Systeme mit Komplementaritäts-Bedingungen	4
1.3 Einteilung der Arbeit	5
<b>2 Tangentialkräfte durch Reibung</b>	<b>7</b>
2.1 Das Reibkraftgesetz nach <i>Coulomb</i>	7
2.2 Indexpmengen	9
2.3 Dynamische Systeme mit Reibkräften	11
<b>3 Behandlung von Zwangsbedingungen über Optimierungsprobleme</b>	<b>17</b>
3.1 Einleitung	17
3.2 Zwangskraftberechnung über quadratische Minimierung	18
3.3 Tangentialkräfte bei bekannter Normalkraft	22
3.4 Tangentialkräfte bei unbekannter Normalkraft	26
<b>4 Dynamische Modelle für Balken mit Reibkontakt</b>	<b>33</b>
4.1 Einleitung	33
4.2 Der Reibbalken bei bekannten Normalkräften	34
4.2.1 Bewegungsgleichung	34
4.2.2 Diskretisierung der Bewegungsgleichung	41
4.2.3 Numerische Integration	43
4.3 Der Reibbalken bei unbekannter Normalkraft	51
<b>5 Die Regelung von Balken durch Reibung</b>	<b>59</b>
5.1 Einleitung	59

5.2	Regelungskonzepte . . . . .	62
5.2.1	Der Fall bekannter Normalkraft . . . . .	62
5.2.2	Der Fall unbekannter Normalkraft . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>79</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>81</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Thema der Arbeit

Diese Arbeit behandelt die semiaktive Regelung von geschichteten Balken, die zeitlich durchgehend im rauen Kontakt zueinander stehen. Dabei ist zum einen die dafür notwendige Simulation von Kontinua im rauen Kontakt eine interessante theoretische Fragestellung. Zum anderen gibt es für den Einsatz geregelter Reibkräfte viele Anwendungen aus Bereichen wie dem Maschinenbau, dem Bauwesen oder der Raumfahrt.

Bei technischen Systemen tritt häufig ein Großteil des unbeabsichtigten mechanischen Energieverlustes an Verbindungs- und Fügestellen auf [30]. Dazu gehört die Dissipation an rauen Verbindungsflächen, die man auch bewusst einsetzt, unter anderem bei der Lagerung von Turbinenschaufeln [69], Schraubenverbindungen in Raumfahrt-Strukturen [24, 90] und verschraubten Balken mit Reibflächen, so genannten Reibleisten [70, 91].

Angeregt durch die aktive Regelung von Stoßdämpfern [41] erschienen die ersten Arbeiten zur Erhöhung der Dissipationsleistung von Reibkraft-gedämpften Fahrwerken durch Regelungen. Dafür wird die Normalkraft in einem rauen Kontakt so verändert, dass die Reibkraft bei der Relativbewegung möglichst viel Arbeit verrichtet. Zu den bereits untersuchten Anwendungen gehört die Regelung einzelner Schraubverbindungen [6, 60] und es gibt Arbeiten, die sich mit dem Schutz von Gebäuden und Brücken gegen Erdbeben beschäftigen [38].

Die so angewandten Regelungskonzepte gehören zu den semiaktiven, das heißt, es werden Parameter verändert, zu denen neben den Normalkräften in Reibkontakten auch Dämpfung und Steifigkeit gehören können. Semiaktive Regelungen durch Reibung haben den Vorteil von inhärenter Stabilität, Robustheit und geringem Energiebedarf [72]. Die Änderung der genannten Parameter erschwert allerdings allgemein die mathematische Untersuchung. Wenn Steifigkeit oder Dämpfung durch eine Regelung verändert werden, treten bei den Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises nichtlineare Terme auf. Durch das Auftreten von Reibung kommen weitere mathematische Probleme hinzu, auf die später eingegangen wird.

Die in der Untersuchung der Reibleiste auftretenden Bewegungsgleichungen bilden ein Beispiel aus einer Klasse von mechanischen Modellen, bei denen raue, zeitlich durchgehende Kontakte auftreten. Viele theoretische Annahmen in dieser Arbeit hierzu schließen nichtholonome Nebenbedingungen ein, wie sie bei flächigen Kontakten auftreten. Dessen ungeachtet beschränkt sich die Arbeit auf die

einfacher zu behandelnden linienförmigen Kontakte. Das hier vorgestellte Modellierungsvorgehen kann für die Integration vieler kontinuierlicher Systeme mit rauem Kontakt verwendet werden. Diese so hergeleiteten Minimalmodelle mit wenigen Freiheitsgraden ermöglichen dann eine Analyse ohne auf die Verwendung kommerzieller FEM-Programme angewiesen zu sein, deren Einschränkungen später angesprochen werden.

## 1.2 Stand der Technik und Literatur

### 1.2.1 Semiaktive Regelung

Der erste Beitrag zu dem Thema semiaktiver Regelungen stammt von *Karnopp* [42]. Motivation hierzu war die eingeschränkte Leistungsfähigkeit passiver Konstruktionen, sowie die Kosten und Anfälligkeit aktiv geregelter auf der anderen Seite. *Karnopp* zeigt, dass semiaktive Regelungen ohne die Nachteile aktiver an deren Leistungsfähigkeit heranreichen. Semiaktive Regelungen schließen die Veränderung von Steifigkeit und Dämpfung ein. Zu den hierfür verwendeten Materialien gehören magneto-rheologische Fluide [79], elektro-rheologische Fluide [43, 51, 89], Gedächtnis-Legierungen [65, 67] und weitere Werkstoffe. *Hurlebaus & Gaul* geben hierzu einen Überblick [35]. Ein schon länger verwendeter Werkstoff sind Piezokeramiken, die als Sensor und auch Aktor eingesetzt werden, siehe *Preumont* [72] und *Casciati* [12]. Die Dämpfung von Balken mit direkt aufgetragenen piezokeramischen Aktoren wird von *Guyomar* [28] behandelt.

Die Änderung der Steifigkeit durch eine semiaktive Regelung und damit zusammenhängende Fragen optimaler Steuerung erscheinen in Arbeiten von *Liu* [52] und *Renzi* [74]. Die Änderung von Reibkräften durch die Normalkraft wird im Zusammenhang mit einem vereinfachten Fahrwerks-Modell von *Lane* [46] und *Stammers* [81] angesprochen, in einem ähnlichen mechanischen Modell, das die Dämpfung von Turbinschaufeln abbildet, von *Dupont* [17]. Wie diese Technik im Erdbebenschutz eingesetzt werden kann, wird von *Inaudi* [38] behandelt. Bei Schrauben, deren Vorspannkraft durch piezokeramische Stapelaktoren verändert wird, gibt es Veröffentlichungen von *Gaul* [25], *Nitsche* [60] und *Becker* [6]. Diese drei letztgenannten Arbeiten aus der Arbeitsgruppe von Prof. Gaul an der Universität Stuttgart stehen im engen Zusammenhang mit der hier vorliegenden Arbeit. Die hier untersuchte Reibleiste wurde dort entworfen und zu Demonstrationszwecken in Vorlesungen verwendet. Eine mit piezokeramischem Stapelaktor versehene Schraubenverbindung wurde von *Gaul* patentiert [23].

Zu weiteren Phänomenen wie der Veränderung der Oberflächen im Verlauf der Nutzung, dem Einfluss der Temperatur, von Zwischenschichten, und der genaueren Beschreibung von Rauheit geben *Bowden* und *Tabor* eine Zusammenfassung [7]. Semiaktive Regelungen, die Reibkontakte verwenden, benötigen ein Modell für die dort auftretenden Reibkräfte. In dieser Arbeit wird ein einfaches Gesetz verwendet, aber es gibt eine Vielzahl komplexerer Modelle wie das von

*Valanis* [24], das von *Dahl* und dessen Erweiterungen durch *Bliman-Sorine* und *LuGre* [36]. *Armstrong-Hélouvy* [4] stellt ein Rauheits-Modell mit sieben Parametern vor. Eine Übersicht über die Modellierungsmöglichkeiten für reibungsinduzierte Kräfte und eine genaue Beschreibung des Übergangs von Haften zu Gleiten steht bei *Ibrahim* [37].

### 1.2.2 Kontaktmechanik

Die Spannungen durch das Aufeinanderpressen von Körpern bei kleiner Kontaktfläche gegenüber den Körperabmessungen wurden zum ersten Mal von *Hertz* [34] berechnet. Er fand eine Analogie zwischen einem Problem aus der Elektrostatik und dem des Kontaktes, die die Berechnung der Spannungen ermöglichte. Die tangentialen Kräfte im Kontakt durch Relativbewegung erscheinen früh in der wissenschaftlichen Literatur bei *Amontons* [1], und später bei *Coulomb* [15], nach dem die einfachste Modellierung der Reibkräfte benannt ist. Die tangentialen Spannungsverteilung, die auftritt, wenn zwei Körper aufeinander abrollen, wurde hingegen erst sehr viel später untersucht, vor allem im Kontakt zwischen Rad und Schiene. *Carter* [11] und *Fromm* [22] fanden unabhängig voneinander in den 30er Jahren Haft- und Gleitgebiete für dieses Problem. Eine Untersuchung des Rad-/Schiene-Kontaktes unter Berücksichtigung numerischer Aspekte wurde von *Kalker* [40] veröffentlicht. Das Buch [39] von *Johnson* stellt viele Ergebnisse aus dem Kontakt zwischen Kontinua zusammen, darunter auch zu den Themen Stoß und Gleitschichten.

Die Differentialgleichungen der Kontaktmechanik sind durch komplementäre Nebenbedingungen charakterisiert, sowohl im normalen als auch im tangentialen Fall. *Lanczos* [45] und *Hamel* [32] erwähnen, dass schon *Fourier* eine Ungleichung für die virtuelle Arbeit eines Systems unter Kontakt formuliert. Sie gehen allerdings nicht näher auf die mathematischen Folgen ein (siehe auch [54]). Eine genauere Behandlung des Themas erfolgte erst durch die Variationsformulierung für den statischen Normalkontakt elastischer Körper. Das Problem ist nach *Signorini* [77] benannt, dessen Schüler *Fichera* dafür einen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis veröffentlichte [19]. Es war der Ausgangspunkt für die Untersuchung von Variationsungleichungen. Hierfür sind viele mathematische Ergebnisse von *Duvaut & Lions* zusammengestellt worden [18].

Die theoretische Einbindung der Kontaktkräfte in die klassische Mechanik kann über ein verallgemeinertes Potential geschehen. Wichtige Arbeiten hierzu stammen von *Panagiotopoulos* [64] und *Glocker* [27]. Der mathematische Hintergrund dieses Ansatzes bildet die konvexe Analysis [13, 75].

### 1.2.3 Finite Elemente und Mehrkörpersysteme

Kontakt zwischen Kontinua wird in gängigen Berechnungsprogrammen mit finiten Elementen modelliert [44, 47, 61]. Die möglicherweise große Anzahl von

Freiheitsgraden führt allerdings dazu, dass in den gängigen Algorithmen mit regularisierten Reibungsgesetzen gearbeitet wird, bzw. mit Strafverfahren [92]. Dadurch ist die Reibkraft nicht mehr Ergebnis komplementärer Nebenbedingungen, sondern eine stetige Funktion mit stark bereichsabhängiger Dämpfung. Der analytische Zusammenhang mit dem Ergebnis einer komplementaritäts-basierten Rechnung ist unklar, und die resultierenden steifen Differentialgleichungen sind numerisch problematisch.

Neben der Untersuchung von Kontinua ist der Kontakt zwischen starren Körpern von Interesse. Dynamische Probleme mit Reibung können schon bei einem Freiheitsgrad zu chaotischem Verhalten führen [71, 76]. Außerdem gibt es Fälle, in denen Lösungen für bestimmte Anfangswerte nicht mehr eindeutig sind oder nicht mehr existieren. Ein Beispiel hierfür stammt von *Painlevé* [62, 63]. Das Eintreten von Normalkontakt zwischen starren Körpern ist mit Stößen verbunden, deren theoretische Eigenschaften und numerische Berücksichtigung Gegenstand gegenwärtiger Forschung sind [8, 26, 49, 50, 58]. Einige Arbeiten zum Stoß zwischen starren Körpern enthalten Techniken, die sich auf die diskretisierten Gleichungen von Kontinua übertragen lassen. Diese Arbeit verwendet eine ähnliche lineare Komplementaritäts-Formulierung wie *Pfeiffer & Glocker* [68] und greift auf Indexmengen zurück, wie sie auch bei *Lötstedt* [53] auftreten.

### 1.2.4 Dynamische Systeme mit Komplementaritäts-Bedingungen

Die frühe Theorie zum Auftreten von Reibung in dynamischen Systemen ist eng verbunden mit dem Gebiet von Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite. Diese treten auch in der Regelungstheorie auf, wenn diskontinuierliche Rückführungen verwendet werden. *Utkin* [86] hat die so entstehenden Gleichungen untersucht, und die Bewegung auf den Diskontinuitätsflächen im Phasenraum als 'sliding mode' bezeichnet. In einem mechanischen System tritt dieser Zustand im Phasenraum bei Haften auf. Frühe mathematische Arbeiten zu Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite stammen von *André & Seibert* [2, 3] und *Taubert* [85]. Viele wichtige Ergebnisse sind von *Filippov* [20, 21] veröffentlicht worden. Das gleichzeitige Auftreten mehrerer Diskontinuitätsflächen wird von *Filippov* jedoch nur kurz behandelt, was die Anwendung auf dynamische Systeme mit mehreren Freiheitsgraden erschwert. Die in den damaligen Arbeiten entwickelte Theorie wurde im Laufe der Zeit zu einem Teilproblem der differentiellen Einschließungen (siehe *Aubin & Cellina* [5] oder *Smirnov* [78]). Zwischen differentiellen Einschließungen, Variationsungleichungen und Komplementaritäts-Formulierungen dynamischer Systeme besteht ein enger Zusammenhang. Erläuterungen hierzu liefern *Brogliato et al.* [9] und *Cottle et al.* [14].

Bei nicht-regularisierter Reibung muss die Integration zu jedem Zeitpunkt die begleitenden Komplementaritäts-Bedingungen berücksichtigen. Das geschieht unter anderem in den Arbeiten von *Stewart* [82, 83], *Dontchev* [16], *Monteiro Marques* [57], *van der Schaft* [88] und *Heemels* [33]. Die Normalkräfte in einem



Kontaktpunkt und ebenso die Normalspannungen in einem Kontaktgebiet können durch Vorüberlegungen zu Beginn der Rechnung bekannt sein. Im allgemeinen sind sie aber zeitabhängige Zwangskräfte, deren Berechnung in einer dynamischen Modellierung zu jedem Zeitpunkt eine offene Frage ist. Da die Normalkräfte nicht nur als Zwangskräfte, sondern auch als unbekannte Größe im Reibkraftgesetz erscheinen, ist ihre Berechnung nicht analog zu anderen Zwangskräften möglich. Die Arbeit geht später genauer auf dieses Thema ein. Die begleitenden Bedingungen ergeben bei bekannten Normalkräften zu jedem Zeitpunkt ein quadratisches Minimierungsproblem (QP), und bei unbekannten Kräften ein lineares Komplementaritäts-Problem (LCP). Beide Probleme sind verwandt: Unter Ungleichungs-Nebenbedingungen stellen die *Karush-Kuhn-Tucker*-Bedingungen des QPs ein LCP dar; umgekehrt lässt sich das LCP als QP formulieren. Da die Matrix des quadratischen Terms im letzten Fall aber allgemein unsymmetrisch ist — die Information aus dem asymmetrischen Teil erscheint in den Nebenbedingungen — geht eine Voraussetzung gängiger Lösungsalgorithmen verloren. Das LCP hat gegenüber dem QP viele eigenständige Eigenschaften, über die *Cottle et al.* einen Überblick geben [14].

### 1.3 Einteilung der Arbeit

Die Arbeit beginnt im Kapitel 2 mit einer Untersuchung des *Coulomb*-Gesetzes. Dieses schreibt die Berechnung einer Kraft vor, die in der gemeinsamen Tangentialebene zweier sich berührender Körper auftritt. Im Gegensatz zu Rückstell- oder Dämpferkräften sind die Haftkräfte aus dem *Coulomb*-Gesetz nicht ausdrücklich als Funktion von Lage oder Geschwindigkeit gegeben. Verschwindende Relativgeschwindigkeit in einem Zeitpunkt ist nur eine notwendige Bedingung für Haften, aber nicht hinreichend. Deshalb wird dieser Zustand als 'vorläufiges Haften' eingeführt. Um die Frage nach Haften oder Gleiten für so einen Zeitpunkt beantworten zu können, wird eine komplementäre Formulierung des Gesetzes vorgestellt. Diese Art von Formulierung erscheint immer, wenn einseitige (unilaterale) Zwangsbedingungen erfüllt werden müssen. In der komplementären Formulierung des *Coulomb*-Gesetzes bestehen notwendige und hinreichende Bedingungen zwischen den Beschleunigungen und Tangentialkräften.

Im Folgenden beschäftigt sich die Arbeit damit, dass in einem mechanischen System mehrere raue Kontakte auftreten. Dann ist es hilfreich, diese nach der momentanen Relativgeschwindigkeit in Mengen einzuordnen. Diese werden Indexmengen genannt, und bilden im zeitlichen Verlauf die Haft- und Gleitzustände des Systems ab. Bis dahin wurden die Tangentialkräfte für einen festen Zeitpunkt berechnet, aber nicht im zeitlichen Verlauf. Die Bewegungsgleichungen eines Systems mit Tangentialkräften aus rauem Kontakt erfüllen nicht die Voraussetzungen klassischer Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Deshalb werden differentielle Einschließungen eingeführt, und einige wichtige Eigenschaften von diesen diskutiert.

Kapitel 3 behandelt Optimierungsprobleme, die im Zusammenhang mit komplementären Nebenbedingungen auftreten. Zu diesen gehört das quadratische Minimierungsproblem (QP) und das lineare Komplementaritäts-Problem (LCP). Diese werden für verschiedene Klassen von Bewegungsgleichungen hergeleitet und jeweils mit einem Beispiel illustriert. Die Einleitung zu diesen beiden Problemen bildet das Kap. 3.2, in dem ein unrestringiertes Minimierungsproblem vorgestellt wird für die Berechnung von Kräften aus zweiseitigen (bilateralen) Zwangsbedingungen. Dieses Verfahren bildet ein Bindeglied zwischen der Behandlung unilateraler und bilateraler Bindungen.

Das Kapitel 4 untersucht die Reibleiste als Beispiel eines Systems mit rauen Kontakten. Dabei werden beide beteiligten Körper als Balken mit zusätzlichen Stabeigenschaften modelliert. Diese können an einzelnen Punkten Reibkräfte aufeinander übertragen. Ausgehend von den Bewegungsgleichungen des Kontinuums erscheinen nach der Diskretisierung gewöhnliche Differentialgleichungen, in denen die Tangentialkräfte der Kontakte als äußere Kräfte erscheinen. Zusammen mit den dazu gehörigen unilateralen Zwangsbedingungen ist die Berechnung dieser Kräfte zu jedem Zeitpunkt über ein Optimierungsproblem möglich. Es werden zwei Klassen von Problemen vorgestellt, die sich darin unterscheiden, ob die Normalkräfte in den Kontakten zu Beginn der Rechnung bekannt sind oder nicht. In Abhängigkeit von dem für die Reibleiste gewähltem Modell können dort beide Klassen von Optimierungsproblemen erscheinen. Das Kapitel enthält für beide Fälle die Ergebnisse aus einer exemplarischen numerischen Integration und diskutiert diese. Alle im Text vorgestellten Rechnungen wurden auf einem PC mit 2,1 GHz-Prozessor durchgeführt. Das Programm zu dem vorgestellten Integrationsverfahren ist mit Hilfe des Software-Pakets *Matlab* geschrieben.

Im anschließenden Kapitel 5 wird am Beispiel von Reibleisten untersucht, auf welche Weise ein geschlossener, semiaktiver Regelkreis die Dissipation gegenüber dem passiven Fall steigert. Dabei treten wiederum zwei Fälle auf. Entweder die Normalkräfte in den Reibkontakten sind direkt als Stellkräfte verwendbar. Oder die Stellkräfte führen auf eine Art und Weise zu den Normalkräften, dass diese — unabhängig von der Art der Regelung — zu jedem Zeitpunkt erst berechnet werden müssen. Das hängt bei der Reibleiste von der Art der Modellierung ab. Außerdem werden die Konzepte von Haftraum und Diskontinuitätsraum eingeführt, um anhand dieser zu untersuchen, auf welche Weise Systeme mit rauen Kontakten durch eine Regelung beeinflusst werden können. In mehreren Rechnungen werden die Auswirkungen unterschiedlicher Regelungen miteinander verglichen, und Ergebnisse präsentiert. Den Abschluss der Arbeit bildet eine Zusammenfassung in Kapitel 6.

Zusammenhänge und Gleichungen, die in einem Kapitel zentrale Bedeutung haben, werden durch einen Strich zum Seitenrand hin hervorgehoben.

## 2 Tangentialkräfte durch Reibung

### 2.1 Das Reibkraftgesetz nach *Coulomb*

Wenn im Kontakt zwischen rauen Kontinua Tangentialkräfte auftreten, können verschiedene Gesetze für die Modellierung verwendet werden. Es gibt eine Vielzahl von Modellen unterschiedlicher Komplexität. Die Details einer realistischen Reibabbildung stehen bei dieser Arbeit nicht im Vordergrund. Hier wird das lokale *Coulomb*-Modell verwendet, dass sich auf die Unterscheidung der Zustände Haften und Gleiten konzentriert und in dem die Reibkräfte linear von der Normalkraft abhängen. Es existieren viele Erweiterungen dieses Modells, wie zum Beispiel die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Gleitkräfte, deren zusätzliche Berücksichtigung geringen Aufwand bereitet. Das Reibkraftgesetz von *Coulomb* wurde ursprünglich für die resultierende Kraft zwischen starren Körpern formuliert, lässt sich aber auf ortsabhängige Spannungen oder Einzelkräfte übertragen.

Die tangentiale Kraft in einem Kontaktpunkt  $f_T$  hängt nach *Coulomb* von der normal auf der tangentialen Fläche des Kontaktpunktes stehenden Kraft  $f_N$  ab. Außerdem gehen in das Gesetz die sich berührenden Materialien ein, charakterisiert durch den Reibkoeffizienten  $\mu$ , und die Richtung der Relativgeschwindigkeit  $\dot{s}_T$  (siehe Abb. 2.1). Die Formulierung zur Berechnung der tangentialen Kraft ist dann

$$\begin{aligned} f_T &= -\operatorname{sign}(\dot{s}_T)\mu f_N, & \dot{s}_T &\neq 0, & (\text{Gleiten}), \\ f_T &\leq |\mu f_N|, & \dot{s}_T &= 0, & (\text{Haften}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei ist der so beschriebene Zusammenhang zwischen Kräften und Geschwindigkeiten nicht zu jedem Zeitpunkt hinreichend und notwendig. Die folgenden Überlegungen verdeutlichen das. Für ein Zeitintervall

$$T = [t_1, t_2], \tag{2.2}$$

in dem fast überall  $\dot{s}_T \neq 0$  gilt<sup>1</sup>, ist die Abbildung an den Orten nichtverschwindender Relativgeschwindigkeit exakt vorgegeben. An einzelnen Zeitpunkten dieses Intervalls mit  $\dot{s}_T = 0$  gilt jedoch kein Haften. Diese Tatsache lässt sich in einer integralen Formulierung der Differentialgleichung der Bewegung berücksichtigen, wenn das Integral nach *Lebesgue* verstanden wird. Es besteht eine mathematische Theorie für die so definierte Lösung einer Differentialgleichung der Bewegung nach

---

<sup>1</sup>Damit ist gemeint, dass die Menge  $\mathcal{M} \subset T$  der Zeitpunkte mit dieser Eigenschaft das *Lebesgue*-Maß  $\mu(\mathcal{M}) = 0$  hat.

*Caratheódory* [21]. Die dann verwendeten Annahmen über die rechte Seite der Differentialgleichung sind weniger einschränkend als die klassischen Voraussetzungen von *Picard-Lindelöf* (siehe [10]).

Als nächstes wird ein Zeitintervall zu Beginn von  $T$  untersucht,

$$T_1 = [t_1, t], \quad t < t_2, \quad (2.3)$$

und es gilt  $\dot{s}_T(t) = 0$ . Dann ist die Bestimmung des unmittelbar folgenden Zustandes 'Haften/Gleiten' nach Gl. (2.1) unklar. Handelt es sich um einen einzelnen Zeitpunkt mit dieser Eigenschaft, und das folgende Zeitintervall

$$T_2 = (t, t_2] \quad (2.4)$$

beginnt mit Gleiten, kann die Lösungstheorie nach *Caratheódory* angewendet werden. Da jedoch auch Haften eintreten könnte, muss einerseits die Entscheidung über den Kontaktzustand getroffen werden, und Gl. (2.1) ist in dieser Formulierung nicht hilfreich. Zum anderen ist die für ein Zeitintervall  $T$  nötige Lösungstheorie in diesem Fall nicht mehr nach *Caratheódory* möglich. Diese Frage wird später wieder aufgegriffen.

Die Entscheidung über Haften oder Gleiten, zusammen mit der damit verbundenen tangentialen Kontaktkraft, ist möglich über eine neue Formulierung des Kontaktgesetzes, die auf die oben beschriebenen Probleme eingeht. Die Formulierung basiert auf komplementären Bedingungen, was auf verschiedene Art erfolgen kann. Diese Arbeit verwendet die Formulierung auf Ebene der Beschleunigungen (siehe auch [27]):

Für jeden Zeitpunkt  $t$  mit  $\dot{s}_T(t) = 0$  gilt

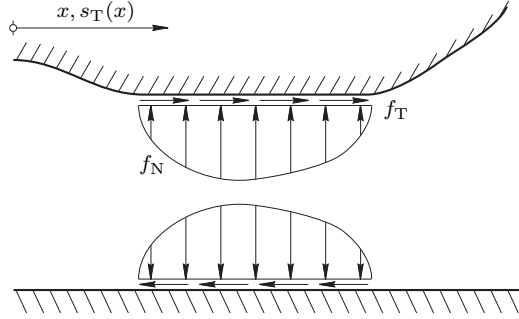
$$f_T \in \begin{cases} \{\mu f_N\}, & \ddot{s}_T(t) < 0, \\ \{-\mu f_N\}, & \ddot{s}_T(t) > 0, \\ (-\mu f_N, \mu f_N), & \ddot{s}_T(t) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

In jedem Zeitpunkt mit  $\dot{s}_T(t) \neq 0$  gilt

$$f_T = -\mu f_N \operatorname{sign}(\dot{s}_T). \quad (2.6)$$

Der Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung ist in der Formulierung (2.5) hinreichend und notwendig, im Gegensatz zu dem Zusammenhang zwischen Kraft und Geschwindigkeit in Gl. (2.1). Die Gleichungen (2.5) und (2.6) bilden die Formulierung des *Coulomb*-Gesetzes, wie es im Folgenden verwendet wird.

Wenn mehrere Punkte eines mechanischen Systems im rauen Kontakt stehen, ist also für die Tangentialkraft bei  $\dot{s}_T = 0$  keine explizite Gleichung gegeben. Es gibt vielmehr einen Satz von Gleichungen und Ungleichungen, aus denen die Kraft berechnet werden soll. Wenn mehrere dieser tangentialen Kräfte in einem



**Abbildung 2.1:** Der raue Kontakt zwischen zwei als Kontinua modellierten Körpern. Die zeitliche Änderung der Verschiebung  $s_T$  am Ort  $x$  gegenüber dem Kontaktpartner führt zu (verteilten) Kräften in Normalenrichtung  $f_N$  und in tangentialer Richtung  $f_T$ .

dynamischen System miteinander gekoppelt sind, stellt sich die Frage, wie diese berechnet werden können. Ein Vorgehen nach dem Prinzip Versuch und Irrtum scheidet wegen des fehlenden analytischen Einblicks und kombinatorischen Reichtums möglicher Kontaktzustände aus. So erhält man für die drei Zustände 'Gleiten nach links/rechts' und 'Haften' bei  $n$  Kontakten die schnell wachsende Zahl von  $3^n$  Kontaktzuständen. Die Antwort auf diese Frage ist im Rahmen von Optimierungsproblemen möglich, die im Kapitel 3 angesprochen werden. Zuerst einmal ist es für die Berechnung der Tangentialkräfte bei mehreren Kontakten hilfreich, die Zustände 'Haften' und 'Gleiten' mit Indexmengen einzuordnen.

## 2.2 Indexmengen

Die  $n_K$  Kontaktpunkte ergeben eine Menge von Indizes

$$\mathcal{I}_K = \{1, 2, \dots, n_K\}. \quad (2.7)$$

Zu einem festen Zeitpunkt kann  $\mathcal{I}_K$  in zwei disjunkte Mengen unterteilt werden, die sich in den Relativgeschwindigkeiten der Kontaktpunkte  $\dot{s}_{Ti}$  unterscheiden,

$$\mathcal{I}_K = \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_H, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{I}_G := \{i \in \mathcal{I}_K : \dot{s}_{Ti} \neq 0\}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{I}_H := \{i \in \mathcal{I}_K : \dot{s}_{Ti} = 0\}. \quad (2.10)$$

$\mathcal{I}_H$  ist noch nicht die Menge der Kontaktpunkte im Haftzustand, denn die Bedingung  $\dot{s}_{Ti} = 0$  an einem einzelnen Zeitpunkt ist für Haften zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Alle Punkte mit dieser Eigenschaft heißen deshalb im Folgen-

den vorläufige Haftpunkte. Die Menge der Indizes aus  $\mathcal{I}_H$  mit der Eigenschaft verschwindender Relativgeschwindigkeit für einen Zeitpunkt und Gleiten in dessen Umgebung ist  $\mathcal{I}_D$ . Alle anderen Indizes aus  $\mathcal{I}_H$  stehen für Kontaktpunkte, die wirklich haften,

$$\mathcal{I}_{\dot{H}} := \mathcal{I}_H \setminus \mathcal{I}_D. \quad (2.11)$$

Die Menge aller Indizes von Punkten im gleitenden Kontakt ist dann

$$\mathcal{I}_{\dot{G}} := \mathcal{I}_G \cup \mathcal{I}_D. \quad (2.12)$$

Damit ist die Aufteilung der  $n_K$  Kontaktpunkte in gleitende und haftende Kontakte eindeutig gegeben durch

$$\mathcal{I}_K = \mathcal{I}_{\dot{H}} \cup \mathcal{I}_{\dot{G}}. \quad (2.13)$$

Die Zuordnung zu  $\mathcal{I}_{\dot{H}}$  bzw.  $\mathcal{I}_{\dot{G}}$  ändert sich mit der Zeit, und Teil einer Kontakt-Rechnung ist die Bestimmung von  $\mathcal{I}_D(t)$ .

Mit Hilfe dieser Index-Mengen kann man nun die Tangentialkräfte  $\mathbf{f}_T$  zerlegen in einen Anteil von Kräften, deren Kontakte mit Sicherheit im Gleitzustand sind,  $\mathbf{f}_G$ , und einen Anteil  $\mathbf{f}_H$ , dessen Kontakte vorläufig haften. Dafür werden Matrizen definiert, die der Auswahl bestimmter Indizes dienen,

$$(P_H)_{ij} = \begin{cases} 1, & i \in \mathcal{I}_K \text{ und } j \in \mathcal{I}_H \\ 0, & i \notin \mathcal{I}_K \text{ oder } j \notin \mathcal{I}_H, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$(P_G)_{ij} = \begin{cases} 1, & i \in \mathcal{I}_K \text{ und } j \in \mathcal{I}_G, \\ 0, & i \notin \mathcal{I}_K \text{ oder } j \notin \mathcal{I}_G. \end{cases} \quad (2.15)$$

Wenn sich nicht alle Kontakte im gleichen Zustand befinden, gilt

$$\mathbf{f}_T = \mathbf{P}_H \mathbf{f}_H + \mathbf{P}_G \mathbf{f}_G \quad (2.16)$$

und

$$\mathbf{f}_H = \mathbf{P}_H^T \mathbf{f}_T, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{P}_G^T \mathbf{f}_T. \quad (2.18)$$

In den Grenzfällen ist diese Zerlegung nicht notwendig,

$$\mathbf{f}_H = \mathbf{f}_T \quad (\mathcal{I}_G = \emptyset), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{f}_T \quad (\mathcal{I}_H = \emptyset). \quad (2.20)$$

## 2.3 Dynamische Systeme mit Reibkräften

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist eine Bewegungs-Differentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T. \quad (2.21)$$

Bewegungsgleichungen dieser Art werden in Kap. 3.3 näher untersucht<sup>2</sup>. Bei diesem mechanischem System mit  $n$  generalisierten Koordinaten und  $n_K$  Reibkontakten ( $n_K \leq n$ ) treten die folgenden Größen auf:

- Der Vektor der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ , und seine Ableitung, die generalisierte Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}$ ;
- die Massenmatrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , positiv definit und symmetrisch;
- die Kräfte aus tangentialem Kontakt,  $\mathbf{f}_T \in \mathbb{R}^{n_K}$ , und alle anderen Kräfte,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ ;
- die kinematische Matrix der Tangentialkräfte  $\mathbf{G}_T \in \mathbb{R}^{n \times n_K}$ , die die Kontaktgeschwindigkeiten auf die generalisierten Geschwindigkeiten abbildet. Die Spaltenvektoren von  $\mathbf{G}_T$  sind linear unabhängig.

Für einen Kontaktpunkt  $i \in \mathcal{I}_K$  soll gelten, dass die lokale Relativgeschwindigkeit linear von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt. Das ist immer der Fall, wenn die Bindung eines Systems bei Haften holonom und skleronom ist,

$$\dot{s}_{Ti} = (\mathbf{g}_{Ti})^T \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.22)$$

Dabei ist  $\mathbf{g}_{Ti}$  eine Spalte der kinematischen Matrix  $\mathbf{G}_T$  (siehe Kap. 3.2 und 3.3). Die Menge der Zustände

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

die Gl. (2.22) erfüllen, bilden dann mit Hilfe des Vektors

$$\mathbf{n}_i := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{Ti} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

eine Hyperebene im Phasenraum,

$$\mathcal{M}_i := \{ \mathbf{x} : \mathbf{n}_i^T \mathbf{x} = 0 \}. \quad (2.25)$$

Wenn die Matrix  $\mathbf{G}_T$  vom Ort oder von der Geschwindigkeit abhinge, würde diese Punktmenge eine gekrümmte Mannigfaltigkeit im Phasenraum formen. Die folgenden Überlegungen beschränken sich aber auf den Fall mit konstantem  $\mathbf{G}_T$ ,

<sup>2</sup>Die Herleitung dieser diskreten Formulierung aus einem Kontinuums-Modell wird am Beispiel der Reibleiste in Kap. 4 gezeigt.

so dass die Elemente der Menge  $\mathcal{M}_i$  einen linearen Vektorraum bilden. Jede Hyperebene  $\mathcal{M}_i$  teilt den Phasenraum in zwei Mengen

$$\mathcal{M}_i^+ := \{ \mathbf{x} : \mathbf{n}_i^T \mathbf{x} > 0 \}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{M}_i^- := \{ \mathbf{x} : \mathbf{n}_i^T \mathbf{x} < 0 \}. \quad (2.27)$$

Da die Gleitkräfte bei einem Übergang zwischen  $\mathcal{M}_i^+$  und  $\mathcal{M}_i^-$  das Vorzeichen wechseln (siehe Gl. 2.6), ist das Vektorfeld  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , definiert durch

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.28)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_i$  unstetig. Aus diesem Grund wird so eine Hyperebene im Folgenden auch Diskontinuitätsraum oder -fläche genannt (siehe Abb. 2.2). Für den Fall eines Punktes, der zu einer einzigen Hyperebene gehört, sind die folgenden zwei Grenzwerte definiert,

$$\mathbf{f}_i^{+/-}(\mathbf{x}) := \lim_{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_i^{+/-}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}_i. \quad (2.29)$$

Wenn nun für einen Zustand  $\mathbf{x}$  beide Grenzwerte des Vektorfeldes in die Richtung der Hyperebene zeigen, bleibt der Zustand dort. Das bedeutet, Gl. (2.22) wird eingehalten, und das System haftet,

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{f}_i^+ < 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_i^T \mathbf{f}_i^- > 0 : \quad (\text{Haften}). \quad (2.30)$$

Die zugehörige Lösungsform heißt 'sliding solution' [78, S.106], und die Bewegung entlang der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_i$  'sliding mode'. Dieser Begriff stammt aus der Regelungstheorie, siehe *Utkin* [86, 87]. Dabei bezieht sich das Wort 'sliding' in einem mechanischen System mit Reibung nicht auf den Vorgang des Gleitens, sondern auf eine Lösungsform im Phasenraum. Zeigt genau einer der  $\mathbf{f}_i^{+/-}(\mathbf{x})$  weg von der Hyperebene, wird die Hyperebene verlassen, und es tritt Gleiten ein,

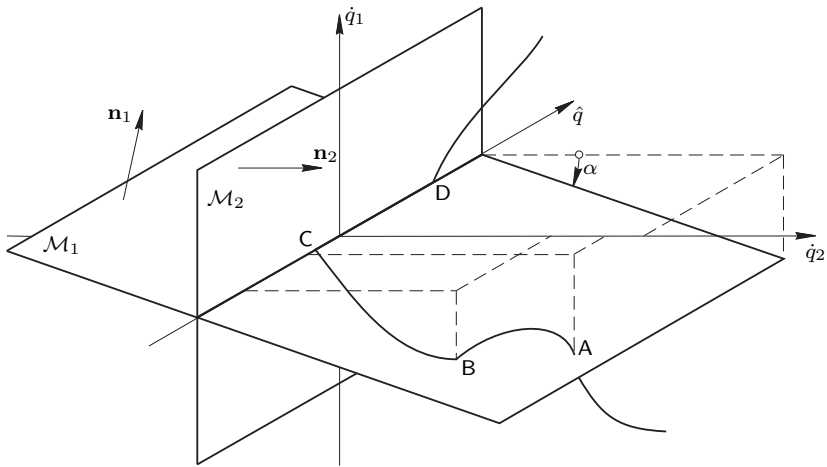
$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{f}_i^+ > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_i^T \mathbf{f}_i^- > 0 : \quad (\text{Gleiten}), \quad (2.31)$$

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{f}_i^+ < 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_i^T \mathbf{f}_i^- < 0 : \quad (\text{Gleiten}). \quad (2.32)$$

Ausführliche Untersuchungen hierzu stammen von *Filippov* [21], *André & Seibert* [2] und *Leine* [48].

Bei der Zugehörigkeit von  $\mathbf{x}$  zu mehr als einer Diskontinuitätsfläche müssen die Grenzwerte (2.29) in allen Kombinationen der  $\mathcal{M}^{+/-}$ -Räume berechnet werden. Die dabei verwendeten Funktionen sind jetzt untereinander gekoppelt. Der Wert des Vektorfeldes selbst muss also vor einer Zuordnung in der Art von Gl. (2.30–2.32) berechnet werden. Die Berechnung des Funktionswertes  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  bei Vorliegen einer Kopplung erfolgt über ein quadratisches Minimierungsproblem (QP), siehe hierzu Kap. 3.3.





**Abbildung 2.2:** Beispiel einer Trajektorie für ein reibbehaftetes dynamisches System mit zwei Freiheitsgraden. Vom Phasenraum wird nur eine Projektion abgebildet mit den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_1$  und  $\dot{q}_2$ , sowie  $\hat{q}$ , einer beliebigen, aber festen Linearkombination der Lage-Koordinaten. Eingezeichnet sind die Projektionen von zwei Diskontinuitätsflächen  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$ , und ihre projizierten Normalvektoren  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_2$ . Die gezeichnete Trajektorie geht in Reihenfolge des Alphabets durch die benannten Punkte, dabei treten die folgenden Kontaktzustände auf: In A herrscht Gleiten bezüglich  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$ , aber vorläufiges Haften bezüglich  $\mathcal{M}_1$ . In B tritt Haften bezüglich  $\mathcal{M}_1$  auf, in C haften beide, und in D tritt das System wieder überall in den Gleitzustand.

Im allgemeineren Fall unbekannter Normalkräfte, der später behandelt wird, erfolgt die Berechnung über ein lineares Komplementaritäts-Problem (LCP), siehe Kap. 3.4. Die Frage, ob diese Grenzwerte eindeutig sind und existieren, wird dann über die Matrix des Optimierungsproblems beantwortet [84].

Die autonome Bewegungs-Differentialgleichung (2.28) erfüllt bei reibbehafteten Systemen nicht mehr alle Voraussetzungen für klassische Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise. Der mögliche Vorzeichenwechsel der Gleitkräfte bei der Durchquerung einer Hyperfläche  $\mathcal{M}_i$  führt dazu, dass die rechte Seite von Gl. (2.28) nicht mehr *Lipschitz*-stetig ist. Damit ist eine Voraussetzung für den Satz von *Picard-Lindelöf* verletzt (siehe *Hale* [31]). Es gibt eine Erweiterung dieser Differentialgleichungs-Theorie von *Carathéodory* [21], die unter schwächeren Voraussetzungen Lösungen garantiert. Hier können die Funktionen auf einer Nullmenge nicht differenzierbar sein. Das tritt in der Mechanik zum Beispiel bei einer Schwingung mit rauer Unterlage auf, wenn über das Zeitintervall um einen Wendepunkt integriert wird. Diese Theorie macht aber keine Aussagen möglich für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, in denen Haften auftritt. Einen Ausweg bietet die Beschreibung mit Hilfe der folgenden

**Definition 1** (Differentielle Einschließung). *Die Zuordnung*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &\in \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad t \in [0, T]\end{aligned}\tag{2.33}$$

mit der mengenwertigen Abbildung  $\mathbf{F}$ , die jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  eine Menge  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$  zuordnet, heißt *differentielle Einschließung*. Dabei muss  $\mathbf{x}(t)$  *absolut stetig* sein, erfüllt also mit dem *Lebesgue-Integral*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{x}}(\tau) \, d\tau\tag{2.34}$$

(siehe Aubin & Cellina [5]).

Dabei ist absolute Stetigkeit eine schwächere Forderung als *Lipschitz*-Stetigkeit. Diese Definition schließt gewöhnliche Differentialgleichungen ein, denn diese können mit  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}$  als differentielle Einschließung beschrieben werden. Wenn die Menge  $\mathbf{F}$  gewisse Eigenschaften erfüllt, kann die Existenz einer Lösung der differentiellen Einschließung gezeigt werden. Für die Eindeutigkeit müssen zusätzliche Forderungen an die Menge der Lösungsfunktionen Gl. (2.33) gestellt werden. Im Fall der reibbehafteten Bewegungsgleichungen wird diese Frage durch das begleitende Optimierungsproblem beantwortet.

Für die Definition einer Menge  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  aus einer unstetigen Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  gibt es verschiedene Möglichkeiten. Nach *Filippov* [20] ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu(\mathcal{M})=0} \text{cl co} \{(\mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon B_n) \setminus \mathcal{M})\}\tag{2.35}$$

(cl: Abschluss, co: konvexe Hülle,  $B_n$ : Einheitskugel um Null im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu$ : Lebesgue-Maß im  $\mathbb{R}^n$ ). Es gibt aber auch Fälle, bei denen  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  direkt definiert wird, zum Beispiel bei unterschiedlichen statischen und dynamischen Reibkoeffizienten [76]. Im Folgenden wird weiterhin die Schreibweise einer Gleichung beibehalten, und keine Mengenzuordnung verwendet, da diese in den Nebenbedingungen (2.5) erscheint:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T, \quad \mathbf{f}_T \in [-\mu f_N, \mu f_N]^{n_K}. \quad (2.36)$$

Die Auswahl eines Elementes aus der Menge erfolgt durch die Komplementaritäts-Bedingungen in Gl. (2.5).

### Beispiel: Differentialgleichung mit unstetiger rechter Seite

Die Differentialgleichung

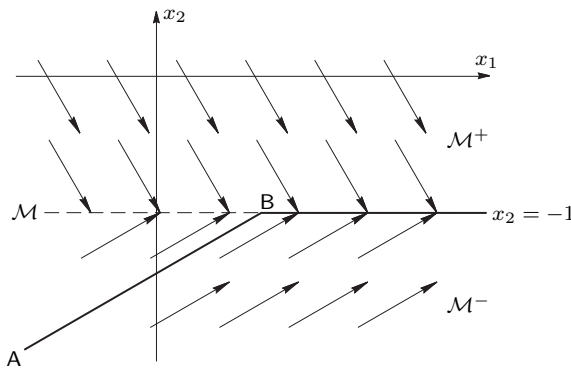
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} [1 & -2]^T, & x_2 + 1 \geq 0 \\ [1 & 1]^T, & x_2 + 1 < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [0, T].$$

soll auf ihr Lösungsverhalten untersucht werden.

Abb. (2.3) zeigt, dass alle Trajektorien der Gl. (2.37) unabhängig von der gewählten Anfangsbedingung bei ausreichend großem  $T$  zu einem Punkt mit  $x_2 = -1$  laufen. Wegen der Werte von  $\mathbf{f}$  in der Umgebung von

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} : x_2 = -1\} \quad (2.38)$$



**Abbildung 2.3:** Die Trajektorien zu der Differentialgleichung (2.37). Ausgehend von der Anfangsbedingung A trifft die Trajektorie bei B auf die Diskontinuitätslinie. Ab diesem Zeitpunkt befindet sich das System in einem sliding mode.

kann die Lösung  $\mathcal{M}$  nicht verlassen. Auf der anderen Seite ist für diese Lösung  $\dot{x}_2 \equiv 0$  notwendig, was im Widerspruch zur Differentialgleichung (2.37) steht.

Gl. (2.37) kann als differentielle Einschließung aufgefasst werden. Für die Berechnung der zuzuordnenden Menge werden zuerst die Grenzwerte auf beiden Seiten der Diskontinuitätslinie ausgerechnet,

$$\mathbf{f}^+(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{f}^-(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}. \quad (2.40)$$

Nach *Filippov* ist dann

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & h \end{bmatrix}^T, & h \in [-2, 1], \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \\ \{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Als zusätzliche Forderung soll für eine eindeutige Lösung gelten, dass die Trajektorie auf  $\mathcal{M}$  bleibt,

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}. \quad (2.42)$$

Auf diese Weise ist die Lösung der Bewegung auf der Diskontinuitätslinie mathematisch zulässig.

## 3 Behandlung von Zwangsbedingungen über Optimierungsprobleme

### 3.1 Einleitung

Zwangsbedingungen von mechanischen Systemen können bi- oder unilateral sein. Im ersten Fall ist eine Gleichung zwischen den Koordinaten, Geschwindigkeiten und der Zeit einzuhalten, im zweiten Fall eine Ungleichung. Damit trotzdem genügend Informationen für eine eindeutige Lösung gegeben sind, gibt es in diesem Fall Zusatzforderungen in Gleichungsform. Nebenbedingungen, die durch eine Kombination von Ungleichungen und Zusatzforderungen gebildet werden, heißen komplementär. Sowohl im tangentialen als auch im normalen Kontakt treten komplementäre Nebenbedingungen auf. Es stellt sich die Frage, auf welche Art die Zwangskräfte berechnet werden können, die für die Einhaltung dieser Bedingungen sorgen.

Kontakte in mechanischen Problemen führen zu unilateralen Zwangsbedingungen, die zusammen mit den Forderungen an die Kontaktkräfte komplementäre Nebenbedingungen bilden. Es stellt sich heraus, dass die Zwangskräfte das Minimum einer Funktion bilden, dass also eine Variationsformulierung zur Verfügung steht. Dabei dürfen die gesuchten Größen nur aus einem bestimmten Gebiet kommen, das Optimierungsproblem ist also restringiert. Wenn die Normalkräfte in den Kontakten bekannt sind, führt die Berechnung der Zwangskräfte auf ein quadratisches Minimierungsproblem (QP). Sind die Normalkräfte unbekannt, und tritt Gleiten auf, führt dies zu einem linearen Komplementaritäts-Problem (LCP).

Im bilateralen Fall sind Zwangskräfte über die Lösung eines linearen Gleichungssystems berechenbar. In Kap. (3.2) wird gezeigt, dass diese Aufgabe auch mit Hilfe eines quadratischen Minimierungsproblems gelöst werden kann, in diesem Fall unrestringiert. Das ist möglich, weil die Lösung bestimmter linearer Gleichungssysteme, zu denen das Untersuchte gehört, auch über eine Variationsformulierung gefunden werden kann. Ein ähnliches Vorgehen findet in der Schwingungslehre statt, wenn die Eigenwerte von Differentialgleichungen über das *Rayleigh'sche* Prinzip bestimmt werden.

## 3.2 Zwangskraftberechnung über quadratische Minimierung

Betrachtet wird die Bewegungsgleichung eines mechanischen Problems mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (3.1)$$

Dabei sind  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten,  $t$  ist die Zeit, und  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix mit den Eigenschaften

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T \quad (\text{symmetrisch}), \quad (3.2)$$

$$\forall \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0} : \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} > 0 \quad (\text{positiv definit}). \quad (3.3)$$

Ausgehend von einem System mit  $n$  Freiheitsgraden soll das System jetzt  $r < n$  zusätzlichen bilateralen Zwangsbedingungen unterliegen. Dieser Abschnitt behandelt das Thema der verallgemeinerten Kräfte, die für die Einhaltung dieser Bedingungen sorgen. Die Zwangsbedingungen lauten allgemein, unter Einschluss des nicht-holonomen und rheonomen Falls,

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Der Sonderfall holonomer Zwangsbedingungen kann immer linear abhängig von den Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  formuliert werden. Es gibt also immer eine Darstellung der Form

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}_H(t) = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

die im Folgenden vorausgesetzt wird. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass die Ableitung der Zwangsbedingungen auf eine Gleichung der folgenden Art führt,

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G} := \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T.$$

Die Unabhängigkeit der verschiedenen Zwangsbedingungen bedeutet, dass

$$\text{rang } \mathbf{G} = r \quad (\text{maximaler Spaltenrang}) \quad (3.7)$$

gilt, was im Folgenden vorausgesetzt wird.

Nach dem Prinzip von *Jourdain* werden die zusätzlichen generalisierten Kräfte  $\boldsymbol{\lambda}$  aus den Bedingungen (3.4) auf die folgende Weise berücksichtigt:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.8)$$

(siehe [66]). Das Einsetzen von (3.8) in (3.6) führt dann auf eine Gleichung, die linear in  $\boldsymbol{\lambda}$  ist,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} + \hat{\mathbf{g}}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

$\mathbf{A}$  ist symmetrisch, und zusätzlich gilt

**Lemma 1** (Definitheit von  $\mathbf{A}$ ). Für  $(\mathbf{M} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \mathbf{M} > 0)$  und  $(\mathbf{G} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, r < n : \text{rang } \mathbf{G} = r)$  gilt für  $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}$

$$\mathbf{A} > 0.\tag{3.10}$$

*Beweis:* Die Matrix  $\tilde{\mathbf{G}}$  wird definiert durch die Ergänzung von  $\mathbf{G}$  um  $(n-r)$  beliebige Spalten, aber so, dass  $\tilde{\mathbf{G}}$  regulär ist. Das ist immer möglich durch die Wahl einer Basis des orthogonalen Komplements zum Raum, der von den Spalten von  $\mathbf{G}$  aufgespannt ist. Dann ist  $\tilde{\mathbf{A}} := \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$  positiv definit, denn die Inversion von  $\mathbf{M}$  erhält deren Definitheit, und die darauf folgende Kongruenztransformation mit  $\mathbf{G}$  ebenso (Trägheitssatz von Sylvester). Mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$  gibt es dann eine eindeutige  $(n, r)$ -Matrix  $\mathbf{P} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{0}]^T$ , und  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P}$ .  $\mathbf{A}$  ist dann aber ein Hauptminor von  $\tilde{\mathbf{A}}$ , und damit ist  $\mathbf{A}$  ebenso wie  $\tilde{\mathbf{A}}$  positiv definit.

□

Die Funktion

$$F(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{b}\tag{3.11}$$

hat für den Wert  $\boldsymbol{\lambda}$  ein Minimum. Die notwendige Bedingung hierfür liefert der Gradient der Funktion an der Stelle  $\boldsymbol{\lambda}$  mit

$$\nabla F(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \Big|_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.\tag{3.12}$$

Die hinreichende Bedingung ist auch erfüllt, weil  $F(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})$  wegen Lemma 1 streng konvex ist. Letztere Eigenschaft garantiert außerdem Existenz und Eindeutigkeit des Extremums. Deshalb gilt:

Die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\boldsymbol{\lambda} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} F(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})\tag{3.13}$$

sind die generalisierten Kräfte aus den Zwangsbedingungen (3.4).

Die numerische Aufgabe, für eine Funktion der obigen Form ein Extremum zu finden, ist ein quadratisches Minimierungsproblem (QP). Für den unrestringierten Fall bietet diese Formulierung keine Vorteile gegenüber der Aufgabenstellung als Gleichungssystem, sondern einen weiteren, äquivalenten Zugang zur Berechnung von Zwangskräften. Wenn die Variablen des Minimierungsproblems jedoch beschränkt sind, ist der Variationsansatz gegenüber der alternativen Verwendung eines Gleichungssystems von Vorteil.

### Beispiel: Physikalisches Pendel

Für das physikalische Pendel der Abb. (3.1) sollen die Lagerkräfte für

$$q_3 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \dot{q}_3 = -\sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.14)$$

mit Hilfe eines QP-Ansatzes berechnet werden.

Für die Aufstellung der nichtlinearen dynamischen Gleichungen wird zuerst die kinetische Energie berechnet:

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{q}_1^2 + 2L \cos(q_3) \dot{q}_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_2^2 + L^2(\Theta + 1)\dot{q}_3^2 - 2L \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right). \quad (3.15)$$

Der *Lagrange*-Formalismus führt auf die Massenmatrix

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \cos(q_3) \\ & 1 & -L \sin(q_3) \\ \text{sym.} & & L^2(1 + \Theta) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

und die Kraft

$$\mathbf{h}_1 = Lm\dot{q}_3^2 \begin{bmatrix} \sin(q_3) \\ \cos(q_3) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Zusätzlich tritt eine generalisierte Kraft aus dem Gewicht des Pendels auf,

$$\mathbf{h}_2 = mg \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -L \sin(q_3) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Die holonomen Zwangsbedingungen lauten in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten

$$g_1 = -\frac{1}{2}\dot{q}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{q}_2 = 0, \quad (3.19)$$

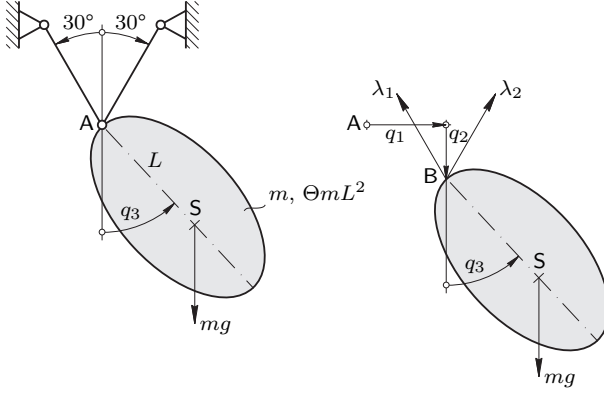
$$g_2 = \frac{1}{2}\dot{q}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{q}_2 = 0. \quad (3.20)$$

Demnach sind die generalisierten Kräfte aus den Zwangsbedingungen

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.21)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu





**Abbildung 3.1:** Ein physikalisches Pendel mit Masse  $m$  und normiertem Massenträgheitsmoment  $\Theta$  ist am Punkt A an zwei Stäben befestigt. Der Schwerpunkt S liegt im Abstand  $L$  von der Aufhängung.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.22)$$

und führen auf die Matrix aus (3.9)

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{4m\Theta} \begin{bmatrix} a - \sqrt{3} \sin(2q_3) & 2\Theta - 2 \cos(2q_3) + 1 \\ \text{sym.} & a + \sqrt{3} \sin(2q_3) \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$a := 4\Theta - \cos(2q_3) + 2. \quad (3.25)$$

Die zugehörige Inhomogenität ist

$$\mathbf{b} = \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-\sqrt{3} \cos(q_3) - \sin(q_3)) L \dot{q}_3^2 - 2\sqrt{3}g \\ (\sin(q_3) - \sqrt{3} \cos(q_3)) L \dot{q}_3^2 - 2\sqrt{3}g \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Für  $\Theta = 1$  folgen die mit  $mg$  normierten Zwangskräfte dann aus der entsprechenden QP-Formulierung

$$\boldsymbol{\lambda} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \begin{bmatrix} 1.07 & 0.75 \\ 0.75 & 1.93 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \begin{bmatrix} -1.83 \\ -1.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.80 \\ -0.116 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Der linke Stab wird also zu dem untersuchten Zeitpunkt auf Zug belastet, der rechte auf Druck.

### 3.3 Tangentialkräfte bei bekannter Normalkraft

Im Folgenden wird eine Bewegungsgleichung der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T \quad (3.29)$$

$$= \mathbf{h} + \mathbf{G}_T (\mathbf{P}_G \mathbf{f}_G + \mathbf{P}_H \mathbf{f}_H) \quad (3.30)$$

untersucht. Dabei sollen die Relativgeschwindigkeiten, auf denen die Tangentialkräfte Leistung erbringen, durch

$$\dot{\mathbf{s}}_T = \mathbf{G}_T^T \dot{\mathbf{q}} \quad (3.31)$$

gegeben sein (siehe Kap. 3.2). Dann führt die Verwendung von Indexmengen auf die Relativgeschwindigkeiten in Kontakten mit vorläufigem Haften,

$$\dot{\mathbf{s}}_H = \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.32)$$

und für alle Kontaktpunkte aus  $\mathcal{I}_G$  gilt

$$\dot{\mathbf{s}}_G = \mathbf{P}_G^T \mathbf{G}_T^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.33)$$

Die Größe der Tangentialkräfte in einem Kontaktpunkt  $i$  ist begrenzt durch das Produkt von Reibkoeffizient  $\mu_i$  und Normalkraft  $f_{N_i}$ . Der Vektor der maximalen Kontaktkräfte ist also

$$\bar{\mathbf{f}}_T = \mathbf{\Lambda}_\mu \mathbf{f}_N, \quad \mathbf{\Lambda}_\mu := \text{diag}(\boldsymbol{\mu}). \quad (3.34)$$

Die Gleitkräfte sind dann nach Gl. (2.6) berechenbar durch

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{P}_G^T \text{diag}(-\text{sign } \dot{\mathbf{s}}_G) \bar{\mathbf{f}}_T, \quad (3.35)$$

wobei die sign-Funktion für das vektorielle Argument elementweise angewendet werden soll.

Bei den Kräften im vorläufigen Haftbereich besteht keine Gleichung als ausdrückliche Berechnungsvorschrift. Zuerst wird der Fall betrachtet, dass die verschwindende Relativgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0$  nicht nur für vorläufiges Haften steht, sondern dass dieser Zustand der Beginn eines Zeitintervalls mit wirklichem Haften ist. Diese Annahme bedeutet, dass die Relativgeschwindigkeit auf einem Zeitintervall  $T = [t_0, t^+)$  verschwindet,

$$\forall t \in T, \mathcal{I}_D = \emptyset : \quad \dot{\mathbf{s}}_H = 0. \quad (3.36)$$

Nach den Kontaktbedingungen in Gl. (2.5) gilt dann für die Kontaktkräfte, dass sie Element der offenen Menge

$$\Omega := (-\bar{f}_{T_i}, \bar{f}_{T_i})^{n_H} \quad (3.37)$$

sind,

$$\forall t \in T, \mathcal{I}_D = \emptyset : \quad \mathbf{f}_H \in \Omega. \quad (3.38)$$

Zu der Zwangsbedingung (3.36) gehört dann eine Zwangskraft  $\mathbf{f}_H$ , die durch eine Minimierungsbedingung berechnet werden kann (siehe Kap. 3.2),

$$\mathcal{I}_D = \emptyset : \quad \mathbf{f}_H(t_0) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \left( \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{A}_H \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{b}_H \right), \quad \tilde{\mathbf{f}} \in \Omega \quad (3.39)$$

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T \mathbf{P}_H^T \quad (3.40)$$

$$\mathbf{b}_H = \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{h} + \mathbf{G}_T \mathbf{P}_G \mathbf{f}_G). \quad (3.41)$$

Nun wird die Möglichkeit zugelassen, dass es mindestens einen Kontaktpunkt  $i$  gibt, bei dem  $\dot{s}_{Ti} = 0$  nur für einen Zeitpunkt  $t$  gilt, aber nicht für das Intervall  $T$  ( $\mathcal{I}_D \neq \emptyset$ ). Dann kann  $\mathbf{f}_H$  nach Gl. (2.5) auch Werte auf dem Abschluss von  $\Omega$  annehmen,

$$\bar{\Omega} := [-\bar{f}_{Ti}, \bar{f}_{Ti}]^{n_H}. \quad (3.42)$$

Im allgemeinen Fall gilt jetzt  $\mathbf{f}_H \in \bar{\Omega}$ . Das Minimierungsproblem lautet dann

$$\mathcal{I}_D \neq \emptyset : \quad \mathbf{f}_H(t_0) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \left( \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{A}_H \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{b}_H \right), \quad \tilde{\mathbf{f}} \in \bar{\Omega}. \quad (3.43)$$

In diesem Fall gelten aber nicht ausschließlich Gleichungsnebenbedingungen für die Relativbeschleunigungen, die Berechnung der Kräfte auf dem Rand  $\partial\Omega$  kann also nicht über das Minimierungsproblem aus Kap. 3.2 hergeleitet werden. Die Tangentialkräfte sind durch *Coulombs* Gesetz beschränkt, ausgedrückt über Ungleichungen

$$-\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_T \leq 0, \quad (3.44)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_T \leq 0. \quad (3.45)$$

Deshalb muss Gl. (3.43) für den optimalen Punkt  $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_H$  die *Karush-Kuhn-Tucker*-Bedingungen erfüllen. Danach existieren *Lagrange*-Multiplikatoren

$$\ddot{\mathbf{s}}_H^+ \geq 0, \quad (3.46)$$

$$\ddot{\mathbf{s}}_H^- \geq 0, \quad (3.47)$$

so dass dort gilt

$$\left( \nabla \left( \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{A}_H \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{b}_H \right) + \nabla (-\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_T)^T \ddot{\mathbf{s}}_H^+ + \nabla (\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_T)^T \ddot{\mathbf{s}}_H^- \right) \Big|_{\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}_H} = 0. \quad (3.48)$$

Außerdem müssen die komplementären Schlupfbedingungen

$$(-\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_T)^T \ddot{\mathbf{s}}_H^+ = 0, \quad (3.49)$$

$$(\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_{\text{T}})^{\text{T}} \tilde{\mathbf{s}}_{\text{H}}^{-} = 0 \quad (3.50)$$

erfüllt sein. Für das gegebene konvexe Gebiet  $\bar{\Omega}$  und die strikt konvexe quadratische Optimierungsfunktion erfüllt eine Lösung der Gl. (3.48) unter der Bedingung (3.49) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösung der Minimierungsaufgabe (3.43).

Im Folgenden wird gezeigt, dass die eben besprochene Minimierungsaufgabe die Forderungen von *Coulomb* nach (2.5) liefert. Für inaktive *Lagrange*-Multiplikatoren ist das Problem (3.43) äquivalent zu (3.39), und diese Aufgabe ist nach den Erläuterungen von Kap. 3.2 eine äquivalente Aufgabenstellung zur Berechnung der Zwangskräfte. Gl. (3.48) vereinfacht sich unter Berücksichtigung von Gl. (3.32) zu

$$\tilde{\mathbf{s}}_{\text{H}} = \tilde{\mathbf{s}}_{\text{H}}^{+} - \tilde{\mathbf{s}}_{\text{H}}^{-}. \quad (3.51)$$

Wenn nun in einem Kontaktpunkt  $i \in \mathcal{I}_{\text{H}}$  eine positive Beschleunigung auftritt, also  $(\lambda_{+})_i > 0$  gilt, liefert die komplementäre Schlupfbedingung nach (3.49)  $-f_{\text{Hi}} - \bar{f}_{\text{Ti}} = 0$ . Ebenso gilt für eine negative Beschleunigung, also  $(\lambda_{-})_i > 0$ , die Bedingung  $f_{\text{Hi}} - \bar{f}_{\text{Ti}} = 0$ . Diese drei Fälle bilden aber die Gl. (2.5). Zusammengefasst gilt:

Die Haftkräfte, für die *Coulomb*-Bedingungen nach (2.5) gelten, minimieren die quadratische Funktion nach (3.43).

### Beispiel: Zwei-Massen-Schwinger auf rauer Unterlage

Für das System der Abb. (3.2) sollen für die Auslenkung  $\mathbf{q} = [-2 \quad 3]^{\text{T}} \frac{\mu\text{mg}}{k}$  und verschwindende Relativgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  die Tangentialkräfte berechnet werden. Dazu werden die tangentialen Kontaktkräfte als äußere Kräfte angenommen, und zusätzlich die dazugehörigen unilateralen Bindungsgleichungen berücksichtigt. Die Forderungen an die Kräfte und Bindungsgleichungen bilden komplementäre Nebenbedingungen, deren Lösung mittels eines quadratischen Minimierungsproblems möglich ist.

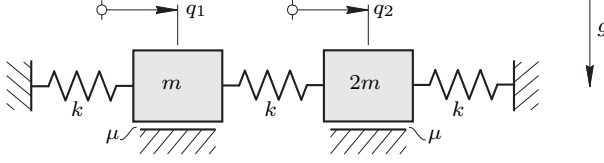
Da in allen rauen Kontakten keine Relativgeschwindigkeit vorliegt ( $\mathcal{I}_{\text{G}} = \emptyset$ ), gilt nach Gl. (2.19)

$$\mathbf{f}_{\text{H}} = \mathbf{f}_{\text{T}}, \quad (3.52)$$

das heißt, in allen Kontaktpunkten liegt vorläufiges Haften vor. Die Tangentialkräfte sind nach *Coulomb* dem Betrag nach beschränkt durch

$$\bar{\mathbf{f}}_{\text{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu\text{mg}. \quad (3.53)$$

An den freigeschnittenen Körpern sollen positive Tangentialkräfte  $f_{\text{Ti}}$  in po-



**Abbildung 3.2:** System mit zwei starren Körpern der Massen  $m$  und  $2m$ , der Lage  $q_i$ , Federsteifigkeit  $k$  und unter rauem Kontakt (Coulomb-Reibung, Reibkoeffizient  $\mu$ ).

sitive  $q_i$ -Richtungen zeigen, dann ist die nach Gl. (3.29) eingeführte kinematische Matrix  $\mathbf{G}_T$  die Einheitsmatrix.

Nach der Normierung der Kräfte mit  $\mu mg$ , Längen mit  $\frac{\mu mg}{k}$  und der Zeit mit  $\sqrt{\frac{m}{k}}$  lautet die Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_T. \quad (3.54)$$

Die Frage nach den Tangentialkräften führt zu einem quadratischen Minimierungsproblem wie in Gl. (3.43) beschrieben,

$$\mathbf{f}_H = \mathbf{f}_T = \arg \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{f}}^T \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} \in [-1, 1] \times [-2, 2].$$

Nach den analytischen Vorüberlegungen existiert die Lösung und ist eindeutig. Das Ergebnis einer numerischen Berechnung ist nach Rücknormierung

$$\mathbf{f}_T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu mg. \quad (3.56)$$

Beide Kontakte befinden sich also trotz der verschwindenden Relativgeschwindigkeit im Gleitzustand. Die zugehörigen Beschleunigungen folgen aus der Differentialgleichung, sind aber auch als aktive *Lagrange*-Multiplikatoren Teil der Lösung von Gl. (3.55),

$$\ddot{\mathbf{s}}_H = \ddot{\mathbf{s}}_H^+ - \ddot{\mathbf{s}}_H^- = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \mu g. \quad (3.57)$$

Abb. 5.1 behandelt in einem anderem Zusammenhang verschiedene Anfangszustände zu dieser Aufgabe.

### 3.4 Tangentialkräfte bei unbekannter Normalkraft

Unbekannte Normalkräfte stellen in dynamischen Systemen mit rauem Kontakt generell ein besonderes Problem in der Modellierung dar. Die Kraft kann auf die übliche Weise als Zwangskraft eingeführt werden, die unter Berücksichtigung der zugehörigen Zwangsbedingung keine virtuelle Arbeit im System verrichtet. Daneben erscheint sie aber auch durch das Kraftgesetz von *Coulomb* als Parameter einer eingepprägten Gleitkraft. Aus diesem Grund ist die Berechnung nicht über eine Minimierung analog zu Kap. 3.3 möglich.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist eine Bewegungsgleichung der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T + \mathbf{G}_N \mathbf{f}_N. \quad (3.58)$$

Dabei ist die kinematische Matrix der Normalkräfte  $\mathbf{G}_N$ , und die der Tangentialkräfte  $\mathbf{G}_T$ . Der Vektor  $\mathbf{h}$  enthält alle äußeren Kräfte, die nicht durch Kontakt hervorgerufen werden. Nach den vorherigen Überlegungen erscheint  $\mathbf{f}_N$  auch in den Tangentialkräften, und zwar wie in Gl. (3.35) beschrieben. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{\Lambda}_G = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_G^T \text{diag}(-\text{sign } \dot{\mathbf{s}}_G) \mathbf{\Lambda}_\mu \quad (3.59)$$

lautet die Bewegungsgleichung also

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + (\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{\Lambda}_G) \mathbf{f}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{P}_H \mathbf{f}_H. \quad (3.60)$$

Die Beschleunigungen in Richtung von  $\mathbf{f}_N$  sollen dem Zusammenhang

$$\ddot{\mathbf{s}}_N = \mathbf{G}_N^T \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.61)$$

folgen. Man sieht, dass die aus der zugehörigen Zwangsbedingung  $\ddot{\mathbf{s}}_N = 0$  resultierende Zwangskraft in Gl. (3.60) nur einen Teil des zu berücksichtigenden Einflusses durch  $\mathbf{f}_N$  ausmacht. In Richtung der Haftkräfte soll wie im Fall bekannter Normalkräfte

$$\ddot{\mathbf{s}}_H = \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.62)$$

gelten. Der Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen in die Kontaktrichtungen und den Kräften ergibt sich aus dem Verwenden von Gl. (3.62) und (3.61) in der Bewegungsgleichung (3.60):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}}_N \\ \ddot{\mathbf{s}}_H \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{h} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{\Lambda}_G & \mathbf{G}_T \mathbf{P}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_H \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_N & \mathbf{A}_C \mathbf{P}_H \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_C^T & \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_T \mathbf{P}_H \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_C \boldsymbol{\Lambda}_G & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_T \boldsymbol{\Lambda}_G & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_2} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_H \end{bmatrix} + \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} \end{bmatrix}. \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Dabei werden die folgenden Abkürzungen verwendet,

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N, \tag{3.65}$$

$$\mathbf{A}_T := \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T, \tag{3.66}$$

$$\mathbf{A}_C := \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T. \tag{3.67}$$

Sie werden im Folgenden Kopplungsmatrizen genannt. Diese Matrizen sind unabhängig von den verwendeten Koordinaten und tragen wichtige Eigenschaften der Kontaktmodellierung in sich.

Die symmetrische und positiv definite Matrix  $\mathbf{A}_1$  berücksichtigt die gegenseitige Kopplung von Haft- und Normalkräften durch die Geometrie der Zwangsbedingungen,  $\mathbf{A}_2$  den Einfluss der Normalkraft als Parameter in der Gleitkraftdefinition. Da die Matrix  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$  nicht mehr symmetrisch ist, kann die in den Kontaktbedingungen enthaltende Komplementarität nicht mehr wie im Kap. 3.3 als quadratisches Minimierungsproblem formuliert werden. Wie im Folgenden gezeigt wird, führt Gl. (3.63) statt dessen unter Kontaktbedingungen auf eine Verallgemeinerung des QP, ein lineares Komplementaritäts-Problem (LCP).

Für die Beschleunigungen in Richtung der Normalkräfte gilt im Kontaktfall in der unilateralen Formulierung die Komplementärbedingung

$$\mathbf{f}_N \geq \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{s}}_N \geq \mathbf{0} : \quad \mathbf{f}_N^T \ddot{\mathbf{s}}_N = \mathbf{0}. \tag{3.68}$$

Die Relation ' $\geq$ ' gilt dabei zwischen jedem Elementpaar der Vektoren. Der Zusammenhang zwischen Beschleunigungen und Kräften ist im vorläufigen Haftfall immer noch durch Gl. (2.6) gegeben. In der Formulierung des Kap. 3.3 heißt das, es gibt eine Zerlegung der Haftkraft in zwei nicht-negative Anteile  $\mathbf{f}_H^{(+)}$  und  $\mathbf{f}_H^{(-)}$ , so dass gilt

$$\mathbf{f}_H = \mathbf{f}_H^{(+)} - \mathbf{f}_H^{(-)}. \tag{3.69}$$

Auch die Relativbeschleunigungen lassen sich zerlegen:

$$\ddot{\mathbf{s}}_H = \ddot{\mathbf{s}}_H^+ - \ddot{\mathbf{s}}_H^-. \tag{3.70}$$

Dann gelten die Komplementaritätsbedingungen

$$\mathbf{f}_H^{(+)} \geq \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{s}}_H^+ \geq \mathbf{0} : \quad \mathbf{f}_H^{(+)\top} \ddot{\mathbf{s}}_H^+ = \mathbf{0}, \tag{3.71}$$

$$\mathbf{f}_H^{(-)} \geq \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{s}}_H^- \geq \mathbf{0} : \quad \mathbf{f}_H^{(-)T} \tilde{\mathbf{s}}_H^- = \mathbf{0}. \quad (3.72)$$

Für die Berücksichtigung des Erscheinens der Normalkraft in den Haftgrenzen werden weitere nicht-negative Hilfs-Variablen eingeführt. Für den Abstand bis zur Haftgrenze ist

$$\tilde{\mathbf{f}}_H^{(-)} := \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_\mu \mathbf{f}_N - \mathbf{f}_H^{(+)}, \quad (3.73)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_H^{(+)} := \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_\mu \mathbf{f}_N - \mathbf{f}_H^{(-)}. \quad (3.74)$$

Zusätzlich müssen die dazu komplementären Beschleunigungen  $\tilde{\mathbf{s}}_H^{+/-}$  eingeführt werden. Sie haben den gleichen Wert wie  $\tilde{\mathbf{s}}_H^{+/-}$ , sind aber über eine andere Menge definiert:

$$\tilde{\mathbf{s}}_H^+ := \tilde{\mathbf{s}}_H^+, \quad (3.75)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_H^- := \tilde{\mathbf{s}}_H^-, \quad (3.76)$$

und es gilt

$$\tilde{\mathbf{f}}_H^{(+)} \geq \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{s}}_H^+ \geq \mathbf{0} : \quad \tilde{\mathbf{f}}_H^{(+)T} \tilde{\mathbf{s}}_H^+ = \mathbf{0}, \quad (3.77)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_H^{(-)} \geq \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{s}}_H^- \geq \mathbf{0} : \quad \tilde{\mathbf{f}}_H^{(-)T} \tilde{\mathbf{s}}_H^- = \mathbf{0}. \quad (3.78)$$

Einzelheiten zu der Einführung der hier verwendeten Variablen stehen in [68]. Mit Hilfe dieser Größen lässt sich das LCP in Standardform formulieren:

Die Normal- und Haftkräfte  $\mathbf{f}_N$  und  $\mathbf{f}_H$ , die Gl. (3.60) unter den obigen Kontaktbedingungen erfüllen, lösen das LCP

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{b}, \quad (3.79)$$

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N & \mathbf{f}_H^{(+)} & \mathbf{f}_H^{(-)} & \tilde{\mathbf{s}}_H^- & \tilde{\mathbf{s}}_H^+ \end{bmatrix}^T \geq \mathbf{0}, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}_N & \tilde{\mathbf{s}}_H^+ & \tilde{\mathbf{s}}_H^- & \tilde{\mathbf{f}}_H^{(-)} & \tilde{\mathbf{f}}_H^{(+)} \end{bmatrix}^T \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}^T \mathbf{y} = 0,$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_N + \mathbf{A}_C \mathbf{A}_G & \mathbf{A}_C \mathbf{P}_H & -\mathbf{A}_C \mathbf{P}_H & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_C^T & \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_T \mathbf{P}_H & -\mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_T \mathbf{P}_H & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_C^T & -\mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_T \mathbf{P}_H & \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_T \mathbf{P}_H & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_\mu & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{A}_\mu & \mathbf{0} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} \\ \mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} \\ -\mathbf{P}_H^T \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$



Wenn die Lasten in einem Modell so gewählt sind, dass mit Sicherheit  $\mathbf{f}_N \geq \mathbf{0}$  gilt, lässt sich die unilaterale Zwangsbedingung in Richtung der Normalkraft auch durch eine bilaterale Bindung modellieren. In diesem Fall wird aus dem Problem der Gl. (3.79) ein Gemischtes lineares Komplementaritäts-Problem [14, S.29]. Wenn die Matrix  $\mathbf{A}_N + \mathbf{A}_C \mathbf{\Lambda}_G$  regulär ist, kann dann die Darstellung durch Eliminieren der Normalkraft in ein LCP geringerer Ordnung überführt werden. Diese Reduktion hat jedoch keine numerischen Vorteile. Durch den zeitabhängigen Beitrag von  $\mathbf{\Lambda}_G$  ist diese Vereinfachung mehrfach durchzuführen. Auch das einfachere LCP hat keine symmetrische Struktur, da der asymmetrische Beitrag aus der Gleitkraft-Definition über das *Schur*-Komplement erhalten bleibt.

Die Untersuchung der Kopplungsmatrizen ermöglicht noch vor Beginn der Rechnung wichtige Aussagen über die Kontaktmodellierung. Wenn bei der Diskretisierung eines Kontinuums verschiedene Möglichkeiten für die Platzierung der Kontaktpunkte bestehen, ermöglicht die Konditionierung der Kopplungsmatrizen deren Beurteilung. Eng liegende Kontaktpunkte führen nach aller Erfahrung zu einer schlechten Konditionierung von  $\mathbf{A}_T$  oder  $\mathbf{A}_N$ . Auch die mögliche gegenseitige Beeinflussung der Kontaktkräfte in einem Starrkörpersystem schlägt sich in den Kopplungsmatrizen nieder. Für Massenspunktsysteme ist  $\mathbf{A}_C$  beispielsweise häufig die Null-Matrix, was theoretisch einfachere Modellierungen ermöglicht.

### Beispiel: Zwei-Massen-Schwinger mit lageabhängiger Normalkraft

Für das System der Abb. (3.3) auf Seite 31 sollen die Kontaktkräfte berechnet werden. Die Lage ist

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix} \frac{f_0}{k} \quad (3.82)$$

und die Geschwindigkeit

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{f_0}{\sqrt{km}}. \quad (3.83)$$

Dabei verändert diese Lageänderung gegenüber  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  den Winkel der Feder so gering, dass dieser für die Rechnung als konstant vorausgesetzt wird (Theorie erster Ordnung).

Das Berechnen der Normalkräfte setzt das Lösen der Bindungen zum rauen Boden voraus, die als Zusatzbedingungen berücksichtigt werden müssen. Eine Koordinate  $q_3$  gibt dann die Lage des linken Körpers an, positiv vom Boden in Richtung dieses Körpers zeigend. In die gleiche Richtung zeigt eine Normalkraft  $f_{N1}$  auf den Körper. Beim rechten Körper gibt die zusätzliche Koordinate  $q_4$  die Lage gegenüber dem Boden an. Eine Lagerkraft  $f_{N2}$  zeigt in Richtung dieser Koordinate. Die Tangentialkräfte  $f_{Ti}$  zeigen im freigeschnittenen System an den Körpern in Richtung der Koordinaten  $q_i$ .

Nach den gegebenen Geschwindigkeiten sind die Auswahlmatrizen

$$\mathbf{P}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

und damit ist nach Gl. (3.59)

$$\mathbf{\Lambda}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Die Berechnung der virtuellen Arbeit liefert die kinematische Matrix der Normalkräfte  $\mathbf{G}_N$ ,

$$\bar{\delta}W_N = \underbrace{\delta \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f}_N}_{=:\mathbf{G}_N}, \quad (3.86)$$

und die kinematische Matrix der Tangentialkräfte  $\mathbf{G}_T$  berechnet sich durch

$$\bar{\delta}W_T = \underbrace{\delta \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}_T}_{=:\mathbf{G}_T}. \quad (3.87)$$

Die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m \left( (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) + 2(\dot{q}_2^2 + \dot{q}_4^2) \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.88)$$

enthält die Massenmatrix

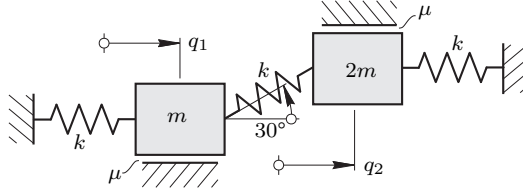
$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & & 2 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

welche zu den Kopplungsmatrizen führt,

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{A}_T = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_C = \mathbf{0}. \quad (3.90)$$

Für die Kräfte auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung, die nicht durch Kontakt hervorgerufen werden, benötigt man die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}k \left( q_1^2 + q_2^2 + \Delta q^2 \right) - f_0 \left( q_1 - q_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta q \right), \quad (3.91)$$



**Abbildung 3.3:** System von zwei starren Körpern der Massen  $m$  und  $2m$  in den Lagen  $q_1$  und  $q_2$ . Alle Federn haben die Federsteifigkeit  $k$ , und stehen unter einer Vorspannung. Die linke und rechte Feder wird mit  $f_0$  zusammengedrückt, die mittlere Feder mit  $\frac{2}{\sqrt{3}}f_0$ . Der Kontakt zum Boden ist rau (Coulomb-Reibung, Reibkoeffizient  $\mu = 1$ ).

$$\Delta q = \frac{\sqrt{3}}{2}(-q_1 + q_2) + \frac{1}{2}(-q_3 - q_4). \quad (3.92)$$

Die Variation der potentiellen Energie liefert die äußeren Kräfte  $\mathbf{h}$  der Gl. (3.60):

$$\delta U = \delta \mathbf{q}^T \nabla U \quad (3.93)$$

$$= \delta \mathbf{q}^T \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 7 & -3 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ & 7 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ & & 1 & 1 \\ \text{sym.} & & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}^T \frac{f_0}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$= \delta \mathbf{q}^T (-\mathbf{h}) \quad (3.95)$$

Mit den jetzt vorliegenden Größen kann die differentielle Einschließung in Gleichungsform aufgeschrieben werden,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T + \mathbf{G}_N \mathbf{f}_N.$$

Die Berücksichtigung der Kontaktkräfte als äußere Kräfte beinhaltet, dass die zugehörigen unilateralen Zwangsbedingungen gelten. Die daraus resultierenden komplementären Nebenbedingungen lassen sich als LCP formulieren, mit der beteiligten Matrix und der dazugehörigen Inhomogenität nach Gl. (3.79)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0,447 \\ -0,224 \\ 0,325 \\ -0,325 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Unter den zur Verfügung stehenden Algorithmen liefert zum Beispiel ein *Lemke*-Algorithmus

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0,447 & 0,447 & 0 & 0,325 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.97)$$

Der linke Körper haftet. Nach Rücknormierung gilt für die Kontaktkräfte insgesamt

$$\mathbf{f}_N = \begin{bmatrix} 0,447 \\ 0,447 \end{bmatrix} f_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_T = \begin{bmatrix} -0,325 \\ -0,447 \end{bmatrix} f_0. \quad (3.98)$$

Abb. 5.2 enthält eine in anderem Zusammenhang vorgenommene Parameterstudie zu diesem Beispiel mit verschiedenen Anfangsbedingungen im Ort und verschwindender Relativgeschwindigkeit für beide Kontakte.

## 4 Dynamische Modelle für Balken mit Reibkontakt

### 4.1 Einleitung

Die passiv gedämpfte Reibleiste aus Abb. (4.1) besteht aus zwei Stahlbändern, die mit Schrauben verbunden sind. Sie wurde von Prof. Gaul an der Universität Stuttgart entworfen, um die Dämpfung durch Reibung in Vorlesungen zu demonstrieren. Die Bohrungen der Schrauben haben in Längsrichtung der Balken Spiel. Das ermöglicht bei Biegeschwingungen eine Relativbewegung der Balken zueinander. Ob diese Relativbewegung möglich ist, hängt von der Vorspannkraft der Schrauben ab. Wenn die Vorspannkraft hoch genug ist, haften die Balkenflächen aufeinander, und es findet keine Dissipation statt, da es keine Relativbewegung gibt. Im entgegengesetzten Fall, bei verschwindender Vorspannkraft, findet auch keine Dissipation statt, da die für die Reibarbeit nötige Normalkraft fehlt. Zwischen diesen beiden Einstellungen der Vorspannkraft gibt es Werte, für die Dissipation möglich ist. Der Aufbau dieser Schraubenverbindungen wird in Abb. (4.2) skizziert. Um die Vorspannkraft der Schrauben über den Stellwinkel zu verändern, sind Tellerfedern eingebaut. Eine semiaktive Regelung der Vorspannkraft kann über den Einbau eines ringförmigen piezokeramischen Aktors berücksichtigt werden.

In dem mechanischen Modell der Stahlbänder muss neben der Verformungsenergie durch Krümmung die über den Querschnitt konstante Längsdehnung berücksichtigt werden. Für den Fall, dass beide Stahlbänder aufeinander haften, ist eine einfache Biegeschwingung des Balkenpaars für jeden Balken eine Überlagerung von Biegeschwingung und Stabschwingung. Das einfachste mechanische Modell, dass die dadurch entstehenden Verzerrungen berücksichtigt, ist der *Euler-Bernoulli*-Balken mit zusätzlichen Stab-Eigenschaften. Es ist bekannt, dass die dazugehörigen partiellen Differentialgleichungen für den homogenen Fall entkoppelt sind. Für den Fall der Reibleiste jedoch ist eine Kopplung über die Reibkräfte an den Balkenoberflächen möglich. Die zwei Balken werden im Folgenden durch die Benennungen 'oben' und 'unten' unterschieden.

Die Reibleiste wird in zwei Abschnitte unterteilt, die unterschiedliche Funktionen haben. In der Umgebung der Schrauben herrschen hohe Normalspannungen zwischen den Balken, und hier findet der Großteil der Dissipation statt. Dieser Teil wird im Folgenden Kontaktabschnitt genannt. Zwischen den Kontaktabschnitten liegt ein Bereich, der Balkenabschnitt genannt wird. Da die Dissipation durch Rei-

bung hier vernachlässigbar ist, muss die Modellierung für Balkenabschnitte vor allem die Steifigkeit und Massenverteilung abbilden. Aus diesem Grund werden die Balkenabschnitte mit  $\mu = 0$  modelliert.

Die Normalkraft zwischen den Balken ist im Allgemeinen unbekannt. Obwohl die Normalkraft als Zwangskraft im Gesamtsystem keine virtuelle Arbeit verrichtet, muss sie berechnet werden, da sie die Haftgrenze und Größe der Gleitkräfte bestimmt (siehe Kap. 3.4). Aus diesem Grund ist es im Allgemeinen notwendig, beide Balken freizuschneiden und für jeden Teil-Balken eine vom anderen Teil unabhängige Verschiebungsvariable einzuführen. Das verdoppelt den Diskretisierungsaufwand gegenüber der Verwendung einer gemeinsamen Verschiebungsvariable. Genau in dem letzteren Fall muss die Normalkraft im voraus bekannt sein. Im Folgenden wird ein Modell hergeleitet, das diese Annahme rechtfertigt. Später im Text wird der erweiterte Fall betrachtet mit unabhängigen Verschiebungsvariablen für beide Teil-Balken.

Für beide Modelle gelten die folgenden Annahmen. Die Schwächung des Balkenquerschnittes durch die Bohrungen, und damit verbundene geringere Biegesteifigkeit wird vernachlässigt. Relativbewegungen innerhalb des Schraubenaufbaus werden ebenso wenig berücksichtigt wie mögliche Stöße zwischen der Schraube und dem Rand der Bohrung. Auch wenn der Grenzfall des gelösten Kontaktes erscheint, behandelt diese Arbeit an keiner Stelle den wiedereintretenden Normalkontakt, und damit keine Stöße. Weitere Annahmen sind die Gültigkeit der Theorie erster Ordnung und der ebene Spannungszustand.

## 4.2 Der Reibbalken bei bekannten Normalkräften

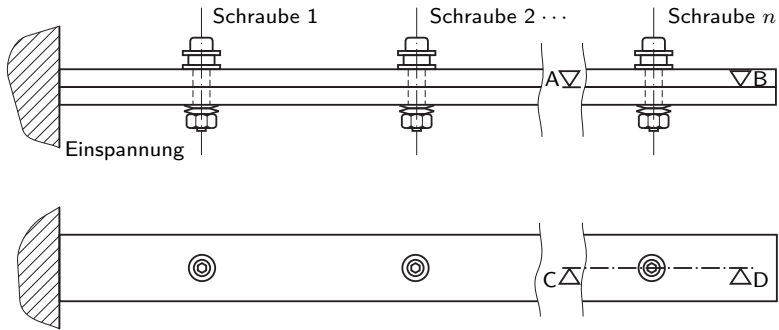
### 4.2.1 Bewegungsgleichung

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung wird das erweiterte Prinzip von *Hamilton* verwendet,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \bar{\delta} W) dt = 0. \quad (4.1)$$

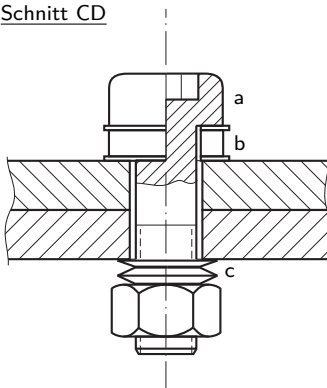
Dabei sind  $\delta T$  und  $\delta U$  die Variationen von kinetischer Energie, bzw. potentieller Energie, integriert zwischen den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$ . Kräfte, die nicht im Ausdruck der potentiellen Energie erscheinen, müssen über ihre virtuelle Arbeit  $\bar{\delta} W$  berücksichtigt werden. Der Strich über dem Delta verdeutlicht, dass das Symbol in diesem Zusammenhang Teil des Namens ist, denn die Berechnung der virtuellen Arbeit erfolgt nicht über eine Variation von  $W$ .

Für die potentielle Energie eines *Euler-Bernoulli*-Balkens mit zusätzlichen Sta-beigenschaften erhält man mit den Verzerrungen aus Verschiebungen in  $x$ -Rich-

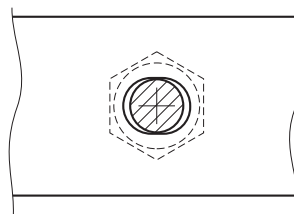


**Abbildung 4.1:** Eine Reibleiste in der Seitenansicht (oben) und der Draufsicht (unten). Zwei Stahlleisten sind mit  $n$  Schrauben verbunden.

Schnitt CD



Schnitt AB



**Abbildung 4.2:** Die Schraube (a) wird mit Hilfe von Tellerfedern (c) mit einer vorgegebenen Kraft angezogen. Ein optionaler Piezostapelaktor (b) kann für die Regelung dieser Normalkraft verwendet werden. Die Bohrung ermöglicht eine Relativbewegung der Stahlleisten.

tung,  $u$ , und in  $z$ -Richtung,  $w$ ,

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EA u'(x, t)^2 dx. \quad (4.2)$$

Dabei ist  $EI$  die Biegesteifigkeit,  $EA$  die Dehnsteifigkeit und  $l$  die Länge des Balkens. Der Strich bezeichnet wie üblich die partielle Ableitung nach der Ortskoordinate  $x$ . Die kinetische Energie eines solchen Balkens ist

$$T_B = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{w}(x, t)^2 + \dot{u}(x, t)^2) dx \quad (4.3)$$

mit dem Punkt für die Ableitung nach der Zeit  $t$  und dem spezifischen Gewicht des Balkens  $\rho A$  [29].

Die Zugkraft  $f_K$  im Schraubenschaft an einer Kontaktstelle  $x_K$  wird als bekannt vorausgesetzt. Dann ergibt die Integration über die Normalspannungen zwischen den Balken in diesem Kontakt eine Normalkraft  $f_N$ , die im Allgemeinen unbekannt ist. Sie wird beeinflusst durch die zusätzliche Masse der Schraubenverbindung gegenüber einem Balkenabschnitt, modelliert als Punktmasse  $m$ . Diese Masse  $m$  wird mit Hilfe des Parameters  $\kappa \in [0, 1]$  aufgeteilt: Dem oberen Balken wird  $\kappa m$  zugeschlagen, der Rest  $(1 - \kappa)m$  wird am unteren Balken angebracht. Wenn die oberen und unteren Balken in der Umgebung von  $x_{Kj} \pm \frac{\Delta l}{2}$  im durchgehenden Kontakt sind, sind die Verschiebungsfunktionen  $w(x, t) := w_j(x, t)$ , ( $j = 1, 2$ ) dort identisch. Dann sind auch die Querkräfte wegen

$$Q_j = -(EI w_j'')' \quad (4.4)$$

oben und unten gleich. Für den Balkenabschnitt der Länge  $\Delta l$  zwischen  $(x_K - \frac{\Delta l}{2})$  und  $x_R = (x_K + \frac{\Delta l}{2})$ , Indizes L und R für die Querkräfte an dieser Stelle, gilt dann oben

$$-Q_L + Q_R + f_K - f_N + \int_{x_L}^{x_R} (-q - \rho A \ddot{w}) dx - \kappa m \ddot{w} = 0 \quad (4.5)$$

und unten

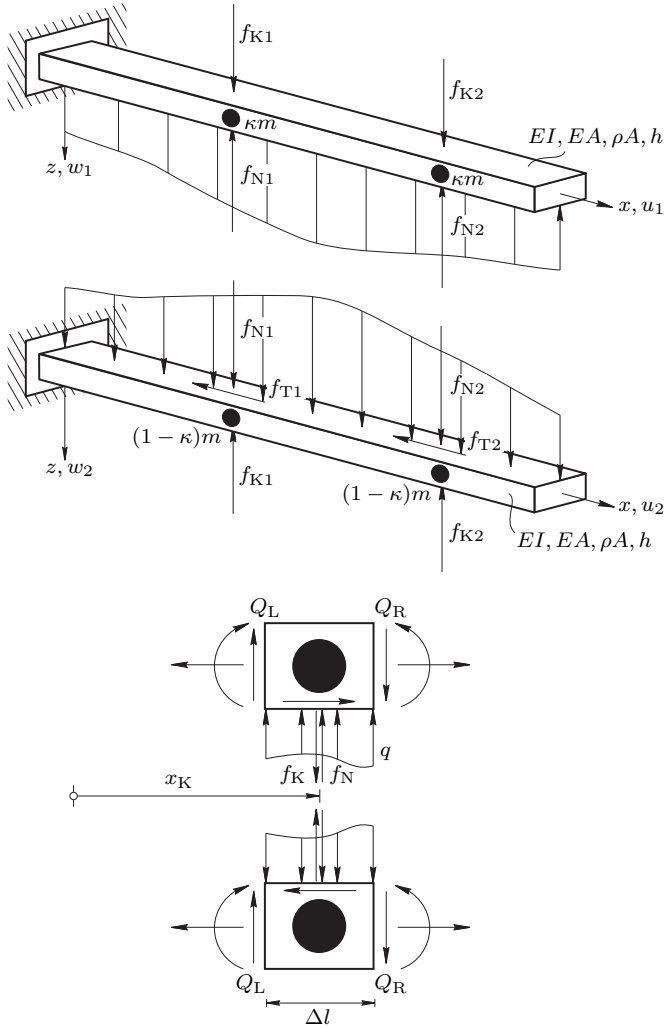
$$-Q_L + Q_R - f_K + f_N + \int_{x_L}^{x_R} (q - \rho A \ddot{w}) dx - (1 - \kappa)m \ddot{w} = 0. \quad (4.6)$$

(siehe Abb. 4.3)

Alle normalen Kräfte zwischen den Balken, die nicht durch  $f_N$  berücksichtigt wurden, werden der Streckenlast  $q$  zugeschlagen. Für  $\Delta l \rightarrow 0$  folgt

$$f_N = f_K + \frac{1 - 2\kappa}{2} m \ddot{w}. \quad (4.7)$$





**Abbildung 4.3:** Das mechanische Gesamt-Modell am Beispiel von zwei Kontakten (oben) und ein freigeschnittener Kontaktabschnitt (unten). Zwei Balken mit gleicher Geometrie, gleichen Materialeigenschaften und möglicherweise asymmetrisch angebrachten Punktmassen sind durch Schrauben verbunden. Die Spannungen im Schraubenschaft und die Spannungen zwischen den Balken in der nächsten Umgebung des Schaftes werden ersetzt durch deren Resultierende  $f_K$  und  $f_N$ .

Für im Voraus bekannte, konstante Normalkräfte müssen der obere und untere Balken die gleiche Biegesteifigkeit besitzen (siehe Gl. 4.4). Außerdem muss die Zusatzmasse  $m$  zu gleichen Anteilen oben und unten liegen. Dieser symmetrische Fall wird zuerst untersucht,

$$\kappa = \frac{1}{2} \quad (\text{bekannte Normalkraft}). \quad (4.8)$$

Ist  $f_N$  unbekannt, muss die virtuelle Arbeit dieser Kraft aus der relativen Verschiebung  $\delta w_1 - \delta w_2$  berücksichtigt werden. Dann ist es notwendig, in den diskretisierten Gleichungen unabhängige Koordinaten für beide Balken einzuführen. Für eine im Voraus bekannte Normalkraft  $f_N$  gilt das nicht, und so kann im Folgenden die gemeinsame Variable  $w(x, t)$  für die Balkenverschiebung verwendet werden. Die beiden Stabverschiebungen  $u_1(x, t)$  und  $u_2(x, t)$  sind weiterhin unabhängig.

Ausgehend von einer Beschreibung mit zwei unabhängigen Biege-Koordinaten führt die Verwendung einer gemeinsamen Variablen  $w(x, t)$  eine Bindung ein,

$$w_1(x, t) = w_2(x, t). \quad (4.9)$$

Eine Zwangsbedingung dieser Art ist bilateral und führt zu einem Lager, dass auch Zugkräfte aufnehmen kann. In dem technischen System liegen beide Teil-Balken nur aufeinander auf, so dass eine wirklichkeits-getreuere Modellierung der Bindung unilateraler Natur wäre. Diese würde es ermöglichen, dass Klaffungen auftreten, und auch der Wiedereintritt des Kontaktes müsste berücksichtigt werden, verbunden mit Stößen. Eine kleine Öffnung zwischen den Balken spielt aber bei kleinen Auslenkungen vermutlich nur eine geringe Rolle. Deshalb ist die eingeschränkte Modellierung des Kontaktes durch eine Gleichung der Form (4.9) sinnvoll. Auch im Kontaktabschnitt führt die bilaterale Bindung nicht zu Problemen, da nur mit positiven  $f_{Ki}$  gerechnet wird. Aus diesem Grund ist die für ein Kontaktproblem theoretisch notwendige unilaterale Bindung in Normalenrichtung immer als Gleichung erfüllt, und die Voraussetzungen des Kontaktgesetzes werden nicht durch die bilaterale Zwangsbedingung verletzt.

Mit diesen Überlegungen können die Energie-Variationen aus Gl. (4.1) für das zusammengesetzte System berechnet werden. In der kinetischen Energie werden zusätzlich die  $n_K$  zusätzlichen Schraubenmassen  $m$  berücksichtigt. Partielle Integration nach der Zeit führt auf

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( \delta w \, 2 \rho A \ddot{w} + \delta u_1 \, \rho A \ddot{u}_1 + \delta u_2 \, \rho A \ddot{u}_2 \right) dx + \sum_{i=1}^{n_K} \left( \delta w \, m \ddot{w} + \delta u_1 \, \frac{m}{2} \ddot{u}_1 + \right. \\ & \left. + \delta u_2 \, \frac{m}{2} \ddot{u}_2 \right)_{x=x_{Ki}} + \int_0^l \left( \delta w'' \, 2 EI w'' + \delta u_1' \, EA u_1' + \delta u_2' \, EA u_2' \right) dx = \bar{\delta} W. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der virtuellen Arbeit der Kräfte, die nicht in der potentiellen Energie berücksichtigt werden. Dafür wird zuerst die virtuelle Verrückung eines materiellen Punktes an der Unterseite eines Balkens berechnet, in Abhängigkeit von  $u$ ,  $w$  und  $w'$ . Der Ortsvektor im verformten System ist

$$\mathbf{r} = (x + u)\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z + \frac{h}{2}\mathbf{e}_\eta. \quad (4.11)$$

Der Vektor  $\mathbf{e}_\eta$  zeigt beim unverformten Balken in Richtung der  $z$ -Achse. Er folgt der Projektion des verformten Querschnittes auf die  $x$ - $z$ -Ebene,

$$\mathbf{e}_\eta = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_z, \quad \varphi = \arctan w'. \quad (4.12)$$

Der Theorie des *Euler-Bernoulli*-Balkens nach bilden die materiellen Teilchen der Projektion dieses Querschnittes eine gerade Strecke. Die Variation von  $\mathbf{r}$  bezüglich  $u$ ,  $w$  und  $w'$  lautet dann

$$\delta \mathbf{r} = \delta u \mathbf{e}_x + \delta w \mathbf{e}_z + \frac{h}{2} \delta \mathbf{e}_\eta. \quad (4.13)$$

Mit dem *Landau*-Symbol  $\mathcal{O}$  für die Angabe der Größenordnung ist die *Taylor*-Entwicklung des letzten Terms

$$\delta \mathbf{e}_\eta = \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial w'} \delta w' \quad (4.14)$$

$$= \left( (-1 + \mathcal{O}(w'))\mathbf{e}_x + \mathcal{O}(w')\mathbf{e}_z \right) \delta w', \quad (4.15)$$

und für  $w' \ll 1$  gilt

$$\delta \mathbf{r} = \left( \delta u - \frac{h}{2} \delta w' \right) \mathbf{e}_x + \delta w \mathbf{e}_z. \quad (4.16)$$

Die Subtraktion der Stab-Verschiebung  $u$  mit der mit dem Hebelarm  $\frac{h}{2}$  multiplizierten Balkenverdrehung  $w'$  ergibt also die Gesamtverschiebung in tangentialer Richtung.<sup>1</sup> Für Kräfte an der Oberseite eines Balkens ändert sich das Vorzeichen vor dem  $\delta w'$ -Term.

Die Kontaktkraft an der unteren Seite des oberen Balkens am Ort  $x_K$  setzt sich aus verschiedenen Anteilen zusammen. Dazu gehört die tangentiale Kraft  $f_T$ , positiv in  $x$ -Richtung, die Kraft in Normalkraftanteil  $f_N$ , positiv in negativer  $z$ -Richtung und der entgegengesetzten Vorspannkraft der Schraube  $f_K$  (siehe Abb. 4.3). Die virtuelle Arbeit dieser Kraft ist

$$\bar{\delta} W_{Oi} = \left( \delta u_1 - \frac{h}{2} \delta w' \right) f_{Ti} + \delta w (-f_{Ni} + f_{Ki}). \quad (4.17)$$

---

<sup>1</sup>Eine weitere Deutung bietet das virtuelle Moment einer tangential zur Balkenoberfläche liegenden Kraft  $f$ . Es verrichtet auf der Balkenverdrehung die virtuelle Arbeit  $f(\delta u - \frac{h}{2} \delta w')$ . Dann führt der zweite Term zu der virtuellen Arbeit des Momentes  $\frac{h}{2} f$  auf der Verdrehung  $\delta w'$ .

Die Reaktionskraft verrichtet an der oberen Seite des unteren Balkens die virtuelle Arbeit

$$\bar{\delta}W_{Ui} = \left( \delta u_2 + \frac{h}{2} \delta w' \right) (-f_{Ti}) + \delta w (f_{Ni} - f_{Ki}). \quad (4.18)$$

Wegen der Gleichungen (4.7) und (4.8) addiert sich die virtuelle Arbeit in Normalenrichtung zu Null. Zur kürzeren Schreibweise des Folgenden wird der Operator

$$\mathcal{L}_T[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (4.19)$$

eingeführt. Dann ist die virtuelle Arbeit an dem System, summiert über alle Kontaktpunkte,

$$\bar{\delta}W = \sum_{i=1}^{n_K} \bar{\delta}W_{Oi} + \bar{\delta}W_{Ui} = \sum_{i=1}^{n_K} \left( \mathcal{L}_T[\tilde{\mathbf{q}}] \Big|_{x=x_{Ki}} \right)^T \tilde{\mathbf{g}}_T f_{Ti} \quad (4.20)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{g}}_T = \begin{bmatrix} -h & 1 & -1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.21)$$

Bei den Kontaktkräften verrichten die virtuellen Verrückungen in normaler Richtung in der Summe keine Arbeit, nur die in tangentialer Richtung. Man kann nun die Tangentialkräfte als  $\mathbf{f}_T$  zusammenfassen, und die virtuelle Arbeit  $\bar{\delta}W$  ist eine lineare Funktion dieses Vektors. Die Frage nach der genauen Form der Abhängigkeit wird im Kap. (4.2.2) wieder aufgegriffen.

Für eine mathematisch fundierte und übersichtliche Herleitung der diskretisierten Bewegungsgleichungen werden die Ausdrücke in Gl. (4.10) mit Hilfe von linearen Differentialoperatoren und Skalarprodukten dargestellt. Die zugrunde liegende Theorie wird in [30, 56, 73] und [59] beschrieben. Um die Kräfte aus der Steifigkeit und Massenverteilung des Systems zu berücksichtigen, werden die linearen Differentialoperatoren  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{M}$  definiert. Das  $\delta$  in der Definition von  $\mathcal{M}$  steht für die Delta-Distribution nach *Dirac*, eine verallgemeinerte Funktion (siehe [80]). Die einzige Eigenschaft von  $\delta$ , die verwendet wird, ist

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x_0 \notin (a, b) \\ f(x_0), & \text{wenn } x_0 \in (a, b) \end{cases} \quad (4.22)$$

Aufgrund dieser eingeschränkten Verwendung besteht keine Gefahr der Verwechslung mit dem Variationssymbol. Die Differentialoperatoren werden über ihre Anwendung auf eine Funktion  $\mathbf{v}$  definiert,

$$\mathcal{K}[\mathbf{v}] := \begin{bmatrix} 2EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 & 0 \\ 0 & -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \mathbf{v}, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{M}[\mathbf{v}] := \left( \underbrace{\rho A \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=: \tilde{\mathbf{M}}_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=: \tilde{\mathbf{M}}_2} \sum_{i=1}^{n_K} \delta(x - x_{K_i}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{v}. \quad (4.24)$$

Für die Funktionen  $\mathbf{u}(x)$  und  $\mathbf{v}(x)$ , jeweils eingeführt als Element eines Vektorraums, wird das folgende Skalarprodukt definiert,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \int_0^l \mathbf{u}^T \mathbf{v} \, dx, \quad (4.25)$$

das Integral verstanden nach *Lebesgue*. Dabei sind die Operatoren  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{K}$  selbstadjungiert und positiv definit. Mit dieser Hilfe kann die Gl. (4.10) nach partieller Integration folgendermaßen dargestellt werden,

$$\tilde{\mathbf{q}} := [w \quad u_1 \quad u_2]^T : \quad \langle \delta \tilde{\mathbf{q}}, \mathcal{M}[\tilde{\mathbf{q}}] + \mathcal{K}[\tilde{\mathbf{q}}] \rangle = \bar{\delta} W. \quad (4.26)$$

Dabei setzt diese Gleichung durch die Definition von  $\mathcal{K}$  einen höheren Grad von Differenzierbarkeit bezüglich des Ortes voraus als Gl. (4.10). Alle in diesem Zusammenhang verwendeten Funktionen sind aber ausreichend glatt, so dass die Darstellungen äquivalent sind.

## 4.2.2 Diskretisierung der Bewegungsgleichung

Für die Diskretisierung der Verschiebungsfunktionen werden allgemein die folgenden Ansätze gemacht,

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{n_B} \Phi_{Bk}(x) q_{Bk}(t) = \Phi_B^T(x) \mathbf{q}_B(t), \quad (4.27)$$

$$u_1(x, t) = \sum_{k=1}^{n_O} \Phi_{Ok}(x) q_{Ok}(t) = \Phi_O^T(x) \mathbf{q}_O(t), \quad (4.28)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{k=1}^{n_U} \Phi_{Uk}(x) q_{Uk}(t) = \Phi_U^T(x) \mathbf{q}_U(t). \quad (4.29)$$

Diese Ansatzfunktionen müssen die geometrischen Randbedingungen erfüllen und sind damit zulässig. Unter Verwendung der generalisierten Koordinaten gilt

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, t) = \Phi(x) \mathbf{q}(t), \quad (4.30)$$

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_B^T & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_O^T & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_U^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_B & \mathbf{q}_O & \mathbf{q}_U \end{bmatrix}^T,$$

bei insgesamt  $n = n_B + n_O + n_U$  Freiheitsgraden. Aufgrund der Linearität von  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{K}$  und der Variation, und unter Ausnutzung der jeweils eingeschränkten Abhängigkeit nur nach  $x$  bzw.  $t$ , lassen sich die Skalarprodukte in Gl. (4.26) nach Einsetzen von (4.30) vereinfachen. Aus der Variation der kinetischen Energie wird

$$\begin{aligned} \langle \delta \tilde{\mathbf{q}}, \mathcal{M}[\tilde{\mathbf{q}}] \rangle &= \langle \delta(\Phi \mathbf{q}), \mathcal{M}[\Phi \mathbf{q}] \rangle \\ &= \langle \Phi \delta \mathbf{q}, \left( \tilde{\mathbf{M}}_1 \Phi + \tilde{\mathbf{M}}_2 \Phi \sum_{i=1}^{n_K} \delta(x - x_{K_i}) \right) \tilde{\mathbf{q}} \rangle \\ &= \delta \mathbf{q}^T \left( \underbrace{\int_0^l \Phi^T \tilde{\mathbf{M}}_1 \Phi \, dx}_{=: \mathbf{M}_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_K} \Phi^T(x_{K_i}) \tilde{\mathbf{M}}_2 \Phi(x_{K_i})}_{=: \mathbf{M}_2} \right) \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{4.31}$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$ . Sie setzt sich zusammen aus einem Anteil der kontinuierlich verteilten Masse,  $\mathbf{M}_1$ , und einem Anteil aus den Einzelmassen,  $\mathbf{M}_2$ . Die Eigenschaften des Differentialoperators  $\mathcal{M}$  führen nach der Diskretisierung durch den Ansatz (4.30) dazu, dass die Massenmatrizen symmetrisch und positiv definit sind.

Die Variation der potentiellen Energie führt zu der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ ,<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \langle \delta \tilde{\mathbf{q}}, \mathcal{K}[\tilde{\mathbf{q}}] \rangle &= \langle \delta(\Phi \mathbf{q}), \mathcal{K}[\Phi \mathbf{q}] \rangle \\ &= \langle \Phi \delta \mathbf{q}, \mathcal{K}[\Phi \mathbf{q}] \rangle \\ &= \delta \mathbf{q}^T \underbrace{\int_0^l \Phi^T \mathcal{K}[\Phi] \, dx}_{=: \mathbf{K}} \mathbf{q} \\ &= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

---

<sup>2</sup>Die Operation  $\mathcal{K}[\Phi]$  verwendet den Zeilenindex von  $\Phi_{jk}$  im Argument:

$$\mathcal{K}[\Phi] := \sum_j \mathcal{K}_{ij} \Phi_{jk}.$$

Auch die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  ist durch den zugrunde liegenden Operator  $\mathcal{K}$  symmetrisch und positiv definit.

Die virtuelle Arbeit der tangentialen Kräfte berechnet sich durch das Verwenden des Ansatzes (4.30) in Gl. (4.20). Dann ist die virtuelle Arbeit (siehe die Fußnote zur Verwendung des Steifigkeits-Operators)

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}W &= \sum_{i=1}^{n_K} (\mathcal{L}_T[\delta\tilde{\mathbf{q}}]|_{x=x_{K_i}})^T \tilde{\mathbf{g}}_T f_{Ti} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_K} (\mathcal{L}_T[\Phi]|_{x=x_{K_i}} \delta\mathbf{q})^T \tilde{\mathbf{g}}_T f_{Ti} \\
 &= \delta\mathbf{q}^T \sum_{i=1}^{n_K} \underbrace{(\mathcal{L}_T[\Phi]|_{x=x_{K_i}})^T}_{=: \mathbf{g}_{Ti}} \tilde{\mathbf{g}}_T f_{Ti} \\
 &= \delta\mathbf{q}^T \underbrace{[\mathbf{g}_{T1} \mid \mathbf{g}_{T2} \mid \dots \mid \mathbf{g}_{Tn_K}]}_{=: \mathbf{G}_T} \mathbf{f}_T \\
 &= \delta\mathbf{q}^T \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

An dieser Stelle ist zu beachten, dass die Variationen nicht durch die Kontaktbedingungen eingeschränkt sind. Die Kontaktkräfte, die möglicherweise Haftkräfte sind, werden aus Gleichungen berechnet, die zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen gefordert werden. Damit bestehen für  $\delta\mathbf{q}$   $n$  linear unabhängige Variationen  $\delta q_i$ . Dann ist die diskretisierte Bewegungsgleichung des Balkensystems

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T \quad \text{mit} \\
 &\text{Anfangsbedingungen,} \\
 &\text{Kontaktbedingungen für } \mathbf{f}_T.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Die Tangentialkräfte werden aus den komplementären Kontaktbedingungen mit Hilfe eines quadratischen Minimierungsproblems berechnet (siehe Kap. 3.3).

### 4.2.3 Numerische Integration

Im Fall von Gleitreibung können die tangentialen Kräfte unstetig sein, wobei die Größe des Kräftesprungs beschränkt ist. Auch bei mehreren Kontakten und möglicherweise gleichzeitig auftretendem Wechsel zwischen Haften und Gleiten ist der Kräftesprung beschränkt. Deshalb sind die Beschleunigungen in der Bewegungsgleichung unstetig, und die Geschwindigkeiten stetig, aber nicht mehr differenzierbar.

Numerische Techniken für die Integration versuchen zum einen, nur Zwangsbedingungen im Gleichungsfall zu berücksichtigen. Diese Algorithmen arbeiten

dann mit einer wechselnden Anzahl von Freiheitsgraden. Die Ereignisse 'Kontakt' und 'Haften' werden in diesem Fall für jeden Zeitpunkt über die Menge aktiver *Lagrange*-Multiplikatoren berücksichtigt (active-set Strategie). In dieser Arbeit wird ein anderer Ansatz verwendet, in dem immer über die volle Anzahl der Koordinaten integriert wird, unter Berücksichtigung von Kräften, die den komplementären Zwangsbedingungen aus Kontakt unterliegen. Ziel seiner Entwicklung war der Einsatz bei Systemen mit weniger als 20 Freiheitsgraden, bei nachvollziehbarer Konvergenz und Stabilität des Verfahrens.

Da die Funktion der Geschwindigkeit nicht mehr differenzierbar ist ( $\dot{\mathbf{q}} \notin C^1$ ), bieten die häufig verwendeten Integrationsroutinen höherer Ordnung keinen sicheren Vorteil mehr. Diese verwenden in den Herleitungen eine Abschätzung für das Restglied der *Taylor*-Entwicklung, was nicht mehr zulässig ist. Die einfachste Möglichkeit für die numerischen Integration eines Anfangsproblems ist das Polygonzug-Verfahren von *Euler* mit der Ordnung eins. Versuchsweise Rechnungen haben jedoch ergeben, dass die angestrebte Genauigkeit sehr kleine Schrittweiten benötigt. Das *Runge-Kutta*-Verfahren zweiter Ordnung nach *Heun* hingegen liefert gute Ergebnisse. Dabei werden für alle berechneten Steigungen die zugehörigen Kontaktkräfte berechnet, und auf dieser Grundlage interpoliert. Solange die Geschwindigkeit bezüglich der Zeit noch *Lipschitz*-stetig ist, kann auch noch die Konvergenz des Integrations-Verfahrens gezeigt werden. Die Ordnung dieses Verfahrens hat allerdings nicht mehr den Wert zwei [10, 16].

Besondere Aufmerksamkeit benötigt die numerische Formulierung der verschwindenden Relativgeschwindigkeit im Kontakt,  $\dot{\mathbf{s}}_H = \mathbf{0}$ . Wenn in der numerischen Rechnung die exakte Erfüllung der Haftbedingung gefordert wird, wechselt die Lösung im Phasenraum in jedem Lösungsschritt von einer Seite von  $\mathcal{M}_i$  zur anderen, da das Vektorfeld in der Umgebung von Haften immer zur Hyperebene hin zeigt. Dieses Phänomen ist in der Regelungstheorie als 'chattering' bekannt. Für die numerische Lösung muss nun eine Umgebung von  $\mathcal{M}_i$  definiert werden, in der die Abfrage nach kleiner Relativgeschwindigkeit erfolgt. Wählt man diese Umgebung zu klein, erhält man eine Lösung mit chattering, wählt man sie zu groß, wird ein Teil dieser Zustände mit großer Relativgeschwindigkeit numerisch als haftend eingestuft. Im Folgenden wird zuerst ein Maß für die Größe dieser Relativgeschwindigkeit hergeleitet.

Im Phasenraum steht  $\mathbf{n}_i$  nach Definition (2.25) senkrecht auf  $\mathcal{M}_i$ , und die Größe der Relativgeschwindigkeit eines Kontaktes entspricht dem Abstand zwischen dem momentanen Aufenthalt im Phasenraum und dessen Projektion auf  $\mathcal{M}_i$ . Mit dem Projektionssatz der linearen Algebra gilt für den Vektor dieses Abstandes

$$\mathbf{x}_{\perp i} = \frac{\mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T}{\mathbf{n}_i^T \mathbf{n}_i} \mathbf{x} \quad (4.35)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_i \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_i := \frac{\mathbf{g}_{Ti} (\mathbf{g}_{Ti}^T)}{(\mathbf{g}_{Ti}^T)^T \mathbf{g}_{Ti}}. \quad (4.36)$$



Die diesem Abstandsvektor zugeordnete Länge soll unabhängig von der Wahl der Koordinaten sein. Das gilt für die natürliche Norm zum inneren Produkt durch die Energie

$$\|\mathbf{a}\|_{\text{E}} := \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{a}}. \quad (4.37)$$

Die relative Größe des Abstandes lässt sich einschätzen durch den Bezug auf die Länge des Vektors  $\mathbf{x}$  im Phasenraum, angegeben durch die gleiche Norm,

$$e_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \frac{\|\mathbf{x}_{\perp i}\|_{\text{E}}}{\|\mathbf{x}\|_{\text{E}}} = \sqrt{\frac{\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{P}}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{P}}_i \dot{\mathbf{q}}}{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \mathbf{q}}}. \quad (4.38)$$

Die numerische Definition der Punktmenge des vorläufigen Haftgebietes lautet mit dem vorgegebenen Parameter  $\varepsilon_0 \ll 1$

$$\mathcal{I}_{\text{H}} = \{i \in \mathcal{I}_{\text{K}} : e_i < \varepsilon_0\}. \quad (4.39)$$

Der Zusammenhang zwischen den Fehlerarten durch die Integrationsschrittweite  $\Delta t$  und die Größe der numerischen  $\mathcal{M}_i$ -Umgebung ist eine offene theoretische Frage [16].

### Rechnung 1: Reibleiste mit bekannter Normalkraft

Eine Reibleiste ist zusammengesetzt aus zwei Stahlbändern rechteckigen Querschnittes mit den folgenden Eigenschaften:

Länge:	$l = 70 \text{ cm}$
Breite:	$b = 3 \text{ cm}$
Höhe:	$h = 0,2 \text{ cm}$
Dichte:	$\rho = 9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$
E-Modul:	$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$

Die Verbindung erfolgt durch sieben gleichmäßig über die Länge verteilte Schrauben an den Orten

$$x_{\text{Ki}} = \frac{2i-1}{14} l, \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (4.40)$$

Die zusätzliche Masse am Balken durch eine Schraube ist

$$m = \frac{1}{60} l b h \rho, \quad (4.41)$$

sie ist gleichmäßig auf den unteren und oberen Balken verteilt. Damit ist die Anpresskraft  $f_{\text{Ni}}$  für alle Kontaktpunkte  $i$  über die Zeit konstant und vor Beginn der Integration bekannt (siehe Gl. 4.7). Der Reibkoeffizient zwischen den Stahlbändern ist  $\mu$ . Alle Schrauben haben für die Rechnung den gleichen

Anpressdruck. Für die Ansatzfunktionen in Gl. (4.27) werden Eigenfunktionen des einseitig eingespannten Balkens und Stabes gewählt

$$\begin{aligned} \Phi_{Bk}(x) = & \sinh\left(\sqrt{\bar{\omega}_k} \frac{x}{l}\right) - \sin\left(\sqrt{\bar{\omega}_k} \frac{x}{l}\right) - \\ & - \left( \frac{\sinh(\sqrt{\bar{\omega}_k}) + \sin(\sqrt{\bar{\omega}_k})}{\cosh(\sqrt{\bar{\omega}_k}) + \cos(\sqrt{\bar{\omega}_k})} \right) \left( \cosh\left(\sqrt{\bar{\omega}_k} \frac{x}{l}\right) - \cos\left(\sqrt{\bar{\omega}_k} \frac{x}{l}\right) \right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\bar{\omega}_k = \left( \frac{2k-1}{2} \pi + e_k \right)^2, \quad e_k \in \{ 0,342, \quad -0,018, \quad 0,001, \quad \dots \}.$$

$$\Phi_{Ok}(x) = \sin\left(\bar{\omega}_k \frac{x}{l}\right), \quad (4.43)$$

$$\Phi_{Uk}(x) = \sin\left(\bar{\omega}_k \frac{x}{l}\right), \quad (4.44)$$

$$\bar{\omega}_k = \left( \frac{-1 + 2k}{2} \pi \right)$$

(siehe [30]). Durch die Verwendung von Eigenfunktionen sind die Massensusmatrix  $\mathbf{M}_1$  und Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  diagonal. Auf der Diagonalen erscheinen die modalen Massen und Steifigkeiten.  $\mathbf{M}_2$  ist eine symmetrische Block-Diagonalmatrix. Für die Verschiebungsfunktion des Balkens werden die ersten acht Eigenfunktionen ausgewählt, für die beiden Stäbe jeweils die ersten zwei:

$n_B$ :	8
$n_O$ :	2
$n_U$ :	2
Anzahl der Freiheitsgrade:	12
Anzahl der Kontakte:	7

Anfangsbedingung im Ort ist in allen Fällen die statische Verformung eines Balkens der Höhe  $2h$  bei vorgegebener Auslenkung  $w(l) = 1$  cm. Daraus folgen nach *Euler-Bernoulli*-Theorie die Verschiebungen  $\tilde{\mathbf{q}}(x, 0)$  des kontinuierlichen Modells. Für die diskreten Anfangswerte werden diese auf die Ansatzfunktionen projiziert, die Anfangsgeschwindigkeiten aller Koordinaten sind Null:

$$\mathbf{q}(0) = \left( \int_0^l \Phi^T \Phi \, dx \right)^{-1} \int_0^l \Phi^T \tilde{\mathbf{q}}(x, 0) \, dx, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}. \quad (4.45)$$

Es werden drei Fälle untersucht,

- Fall 1:  $f_N = 2,5 \text{ N}$ ,  $\mu = 0$
- Fall 2:  $f_N = 3,5 \text{ N}$ ,  $\mu = 0,5$
- Fall 3:  $f_N = 1000 \text{ N}$ ,  $\mu = 0,5$

Die Werte sind so gewählt, dass sich folgende bekannte Eigenschaften gleitender Balkenpaare numerisch überprüfen lassen: Die Eigenfrequenzen der Schwingungen in  $z$ -Richtung hängen im kontinuierlichen Balkenmodell linear von der Balkenhöhe ab. Wenn also bei Fall 3 überall und zu jeder Zeit Haften auftritt, sollte der Balken bei gleichen Anfangsbedingungen eine doppelt so schnelle Bewegung ausführen wie im Fall 1. Für den Fall 1 und 3 wird keine Dissipation durch Reibung erwartet, aber im Fall 2.

Das Perioden-Verhältnis der niedrigsten zur höchsten Eigenfrequenz des homogenen, entkoppelten Systems beträgt

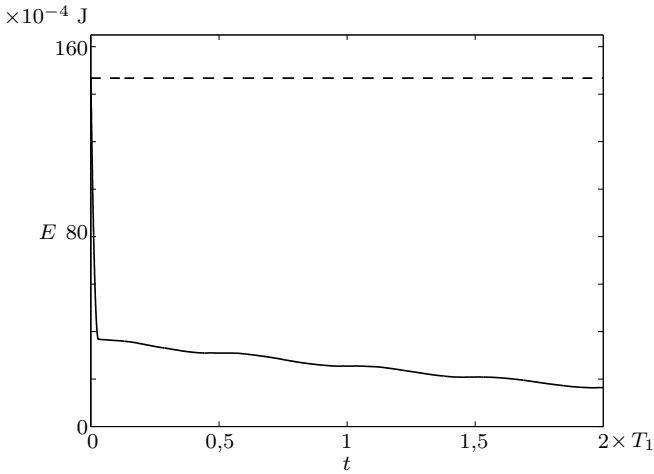
$$\frac{T_1}{T_{12}} \approx 1600. \quad (4.46)$$

Der große Unterschied bei nur zwölf Freiheitsgraden wird verursacht durch die Geometrie des Problems mit geringer Nachgiebigkeit der Stäbe bei gleichzeitig biegeweichen Balken. Diese Eigenschaften führen zu einer steifen Differentialgleichung, deren Integration zeitaufwändig ist. Die Projektion des Problems auf die niedrigeren Moden über eine *Guyan*-Reduktion ist nicht möglich, da dies eine Kopplung in der Steifigkeitsmatrix voraussetzt [72]. Numerische Techniken zur schnelleren Integration der steifen Differentialgleichung werden hier nicht angewendet. Durch die kleine Schrittweite wird ein hoher Rechenaufwand in Kauf genommen.

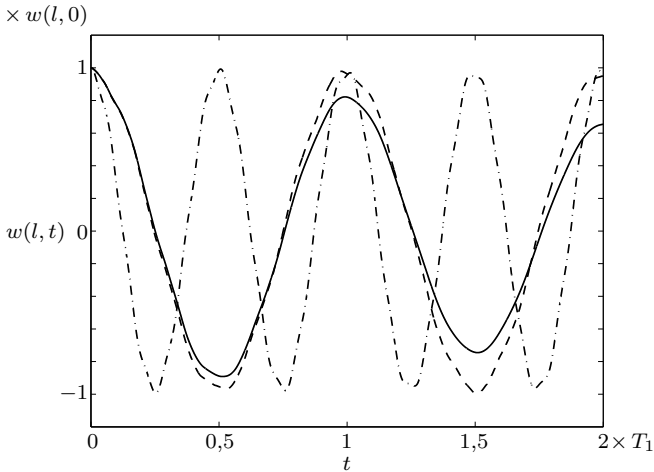
Bei mindestens 50 Schritten pro kleinster Periode hat die Verwendung des *Heun*-Verfahrens zu guten Ergebnissen geführt. Höhere Werte sind bei kleineren Werten für  $\varepsilon_0$  notwendig, das mit  $10^{-3}$  gewählt wurde. In den hier vorgenommenen Rechnungen sind die folgenden Werte verwendet worden,

Zeitintervall:	$2 T_1 = 0,625 \text{ s}$
Auflösung:	100 Schritte / $T_{12}$
Rechenschritte:	320.000

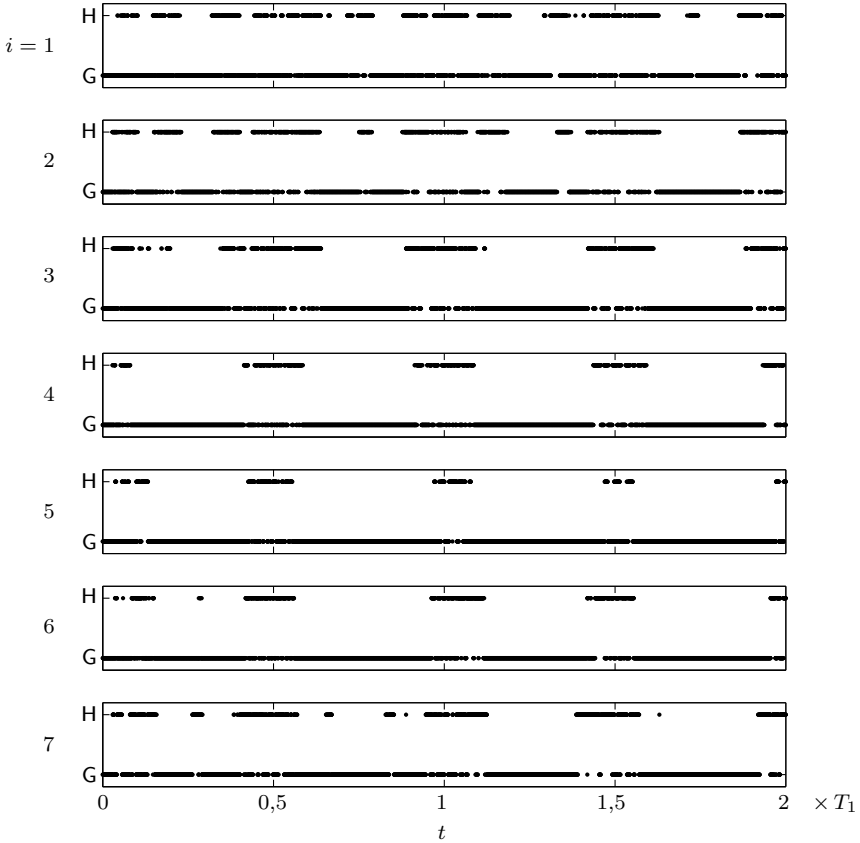
Die Ergebnisse sind in den Abb. (4.5) bis (4.6) dargestellt. Jede der drei Rechnungen hat ungefähr 15 Minuten benötigt. Die Verschiebungen des Balkenendes zeigen qualitativ das erwartete Verhalten, ebenso die Dissipation. Der starke Abfall zu Beginn beim Fall 2 ist auf die Anfangsbedingungen zurückzuführen, die so gewählt sind, als ob beide Balkenteile haften würden. Bei dem zu Beginn einsetzenden Gleitzustand wird die in den Stäben vorhandene potentielle Energie mit Schwingungen hoher Frequenz abgebaut, bis eine langsamere Dissipation einsetzt. Bei dieser wird an den Stellen höchster Relativgeschwindigkeit der ersten Balken-Mode dissipiert, aber mit wesentlich geringerer Leistung als zu Beginn. Abb. (4.6) dokumentiert diesen Verlauf von Haften und Gleiten in den sieben Kontaktpunkten im Fall 2.



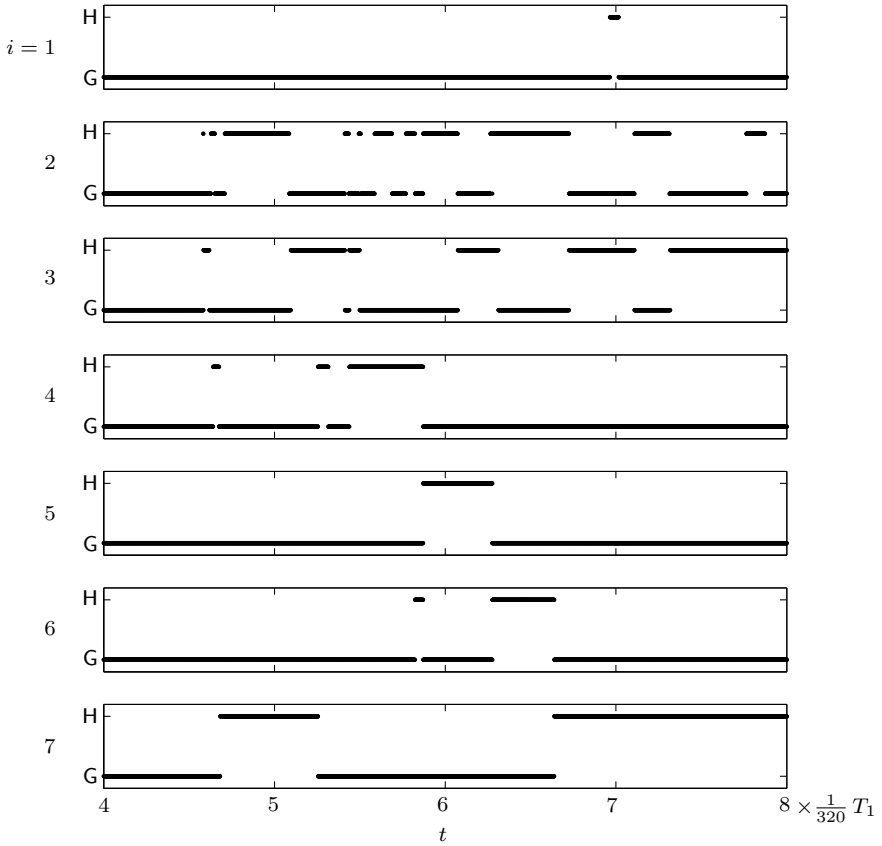
**Abbildung 4.4:** Energiegehalt des Systems. Bei den Fällen 1 und 3 (– –) tritt keine Dissipation auf, aber bei Fall 2 (—). Aufgrund der Anfangsbedingungen dominiert bei Fall 2 zu Beginn der Rechnung eine hochfrequente Bewegung, die zu starker Dissipation führt.



**Abbildung 4.5:** Verschiebung der Balkenspitze  $w(l, t)$  in drei Lastfällen. Bei Fall 1 (– –) gleiten die Balken bei verschwindendem Reibkoeffizient, bei Fall 2 (—) wechseln Gleiten und Haften ab, und bei Fall 3 (– ·) haften die Balken durchgehend. Der Anfangswert der Balkenauslenkung ist  $w(l, 0) = 1$  cm, der Bezugswert für die Zeit ist die Periode der ersten Mode eines Balkens,  $T_1 = 0,3126$  s.



**Abbildung 4.6:** Haft- und Gleitverteilung über die Zeit. Im Fall 2 treten an den Kontaktstellen  $x_{Ki}$  periodische Gleit- und Haftzustände auf (G/H). Aufgrund der beschränkten Zeichengenauigkeit sind die sich ausschließenden Kontaktzustände nicht überall zu unterscheiden (siehe Abb. 4.7).



**Abbildung 4.7:** Ausschnitt aus der Haft- und Gleitverteilung über die Zeit. Zu Beginn der Simulation des Falls 2 befinden sich alle Kontakte an den Stellen  $x_{Ki}$  im Gleitzustand (G). Kurz nach  $\frac{1}{80} T_1$  treten die ersten Haftzustände auf (H). Siehe Abb. (4.6)

### 4.3 Der Reibbalken bei unbekannter Normalkraft

Die Annahme bekannter Normalkräfte in den Kontaktbereichen ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Dazu gehört die gleiche Biegesteifigkeit und eine symmetrische Verteilung der Zusatzmassen durch die Schrauben. Es ist für die technische Anwendung interessant, wie ein in der Struktur vorhandener Balken durch zwei zusätzliche, dünnere Balken gedämpft wird. In diesem Fall ist die Normalkraft unbekannt. Auch ein zusätzlicher Aufbau in den Schrauben zur Regelung erschwert die Annahme symmetrischer Massenverteilung und führt zu einer unbekannten Normalkraft. Der Fall wird am letzten Beispiel untersucht mit

$$\kappa \neq \frac{1}{2} \quad (\text{unbekannte Normalkraft}) \quad (4.47)$$

(siehe Gl. 4.7).

Weiterhin werden die Annahmen des *Euler-Bernoulli*-Balkens verwendet, denen zu Folge die kinetische und potentielle Energie nach Gl. (4.2) und (4.3) berechnet wird. Die unbekannte Normalkraft wird in den Bewegungs-Gleichungen berücksichtigt, indem die zugehörige Zwangsbedingung mit zwei unabhängigen Verschiebungen in Richtung der Normalkraft formuliert wird. In  $z$ -Richtung sind  $w_1$  und  $w_2$  also in den Kontaktpunkten ungleich, und erscheinen deshalb für die gesamte Balkenlänge als zwei unabhängige Funktionen. Eine in den Balkenabschnitten mögliche Streckenlast  $q$ , wie im Kapitel über bekannte Normalkräfte eingeführt, würde dann in dem Gesamtsystem virtuelle Arbeit verrichten. Die Bindung zwischen den Balken soll aber stattdessen nur punktwise in den Kontaktbereichen erfolgen, so dass keine Streckenlast auftritt. Wenn die Lage der Kontaktpunkte ausreichend eng ist, können beide Balkenverschiebungen in den ersten Moden nur wenig voneinander abweichen. Aus diesem Grund erfolgt eine Modellierung unter der Annahme von Bindungen, die ausschließlich in den Kontaktbereichen liegen. Eine Berücksichtigung der Bindungskräfte in Balkenabschnitten macht die Einführung abschnittsweiser Ansatzfunktionen notwendig und führt zu finiten Elementen.

Die Variable der Verschiebung des Kontinuum-Modells muss gegenüber dem Fall bekannter Normalkraft erweitert werden auf

$$\tilde{\mathbf{q}} = [w_1 \quad w_2 \quad u_1 \quad u_2]^T. \quad (4.48)$$

Für die virtuelle Arbeit wird wiederum die Darstellung über das Skalarprodukt (4.25) verwendet,

$$\langle \delta \tilde{\mathbf{q}}, \mathcal{M}[\tilde{\mathbf{q}}] + \mathcal{K}[\tilde{\mathbf{q}}] \rangle = \bar{\delta} W. \quad (4.49)$$

Die Differentialoperatoren für Steifigkeit und Masse sind in diesem Fall, in weit-

gehender Analogie zu Gl. (4.23),

$$\mathcal{K}[\mathbf{v}] := \begin{bmatrix} EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \mathbf{v}, \quad (4.50)$$

$$\mathcal{M}[\mathbf{v}] := \left( \underbrace{\underbrace{\underbrace{\rho A \mathbf{E}}_{=: \tilde{\mathbf{M}}_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m}_{=: \tilde{\mathbf{M}}_2} \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \kappa) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \kappa) \end{bmatrix}}_{=: \tilde{\mathbf{M}}_2} \sum_{i=1}^{n_K} \delta(x - x_{K_i}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{v}. \quad (4.51)$$

Wie oben erläutert, verrichtet die Normalkraft nun virtuelle Arbeit. Mit Hilfe des Operators

$$\mathcal{L}_T[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (4.52)$$

gilt also, hergeleitet wie in Gl. (4.20),

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n_K} \left( (\mathcal{L}_T[\delta \tilde{\mathbf{q}}]|_{x=x_{K_i}})^T \tilde{\mathbf{g}}_T f_{Ti} + (\delta \tilde{\mathbf{q}}|_{x=x_{K_i}})^T \tilde{\mathbf{g}}_N (f_{Ni} - f_{Ki}) \right). \quad (4.53)$$

Dabei sind

$$\tilde{\mathbf{g}}_T := \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} & -\frac{h}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.54)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_N := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4.55)$$

Die vorgegebenen Kräfte  $f_{Ki}$  werden in dem Vektor  $\mathbf{f}_0$  zusammengefasst. Alle Verschiebungsvariablen  $\tilde{q}_j$  werden nun jeweils mit einer Menge von Ansatzfunktionen  $\Phi_{(j)}$  und generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}_{(j)}$  diskretisiert (siehe Gl. (4.27). Dann ist der Ansatz für die gesamte System-Verschiebung  $\tilde{\mathbf{q}}$ , analog zu (4.30),

$$\tilde{\mathbf{q}} = \Phi \mathbf{q}. \quad (4.56)$$

Im nächsten Schritt werden die Systemmatrizen auf die gleiche Weise wie im Kap. 4.2.2 hergeleitet, aber unter Verwendung der oben definierten Steifigkeits-



und Trägheitsoperatoren,

$$\mathbf{K} = \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T \mathcal{K}[\boldsymbol{\Phi}] \, dx, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\mathbf{M}}_1 \boldsymbol{\Phi} \, dx + \sum_{i=1}^{n_K} \boldsymbol{\Phi}^T(x_{K_i}) \tilde{\mathbf{M}}_2 \boldsymbol{\Phi}(x_{K_i}). \quad (4.58)$$

Die kinematische Matrizen für die Tangential- und Normalkräfte folgen aus Gl. (4.53),

$$\mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{T1} & \mathbf{g}_{T2} & \dots & \mathbf{g}_{Tn_K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{Ti} := \left( \mathcal{L}_T[\boldsymbol{\Phi}] \Big|_{x=x_{K_i}} \right)^T \tilde{\mathbf{g}}_T, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{G}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{N1} & \mathbf{g}_{N2} & \dots & \mathbf{g}_{Nn_K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{Ni} := \left( \boldsymbol{\Phi} \Big|_{x=x_{K_i}} \right)^T \tilde{\mathbf{g}}_N. \quad (4.60)$$

Die Verwendung des Ansatzes (4.56) in der Bewegungsgleichung des Kontinuums (4.49) führt dann zu der diskretisierten Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{G}_N \mathbf{f}_0 + \mathbf{G}_N \mathbf{f}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T \quad \text{mit} \\ &\quad \text{Anfangsbedingungen,} \\ &\quad \text{Kontaktbedingungen für } \mathbf{f}_T \text{ und } \mathbf{f}_N. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Da die Normalkraft im Gleitfall als Parameter der Tangentialkraft auftritt, ist eine Berechnung der Kontaktkräfte nicht mehr über ein quadratisches Minimierungsproblem (QP) möglich — im Gegensatz zum Kap. 4.2. Statt dessen müssen die Kontaktkräfte über ein lineares Komplementaritäts-Problem (LCP) berechnet werden. Dessen Herleitung steht im Kap. 3.4. Die numerische Integration erfolgt in Analogie zu dem in Kap. 4.2.3 erläuterten Verfahren. Statt des begleitenden QPs werden die Kontaktkräfte jetzt über ein LCP berechnet.

**Rechnung 2: Reibleiste mit unbekannter Normalkraft**

Die hier vorgenommene Rechnung untersucht nahezu das gleiche technische System wie Fall 2 von Rechnung 1 (Seite 45). Zu diesen Gemeinsamkeiten gehört das Material, die Geometrie, die Anzahl und Lage der Kontaktpunkte, die Anfangsbedingung und der Ansatz mit Eigenfunktionen. Außerdem verwendet die Rechnung das gleiche Zeitintervall, bei gleicher Auflösung und  $\varepsilon_0$ . Abweichend von dem Problem ist die Verteilung der Schraubenmasse  $m$  auf den oberen und unteren Balken mit Hilfe des Parameters  $\kappa$  (siehe Gl. 4.7). Hier wird in einem Fall die volle Schraubenmasse einem der Balken zugeschlagen, im anderen Fall für den Vergleich, auch mit Rechnung 1, die Masse symmetrisch aufgeteilt.

Fall (1):  $\kappa = 1$

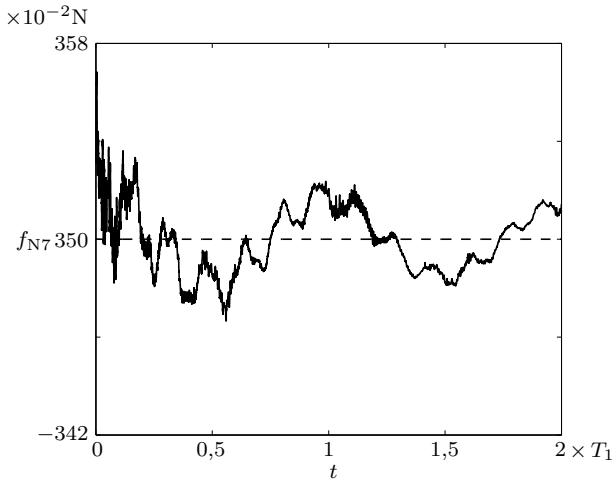
Fall (2):  $\kappa = 0,5$

Bei einem Reibkoeffizienten von  $\mu = 0,5$  ist die vorgegebene Last in allen Kontakten  $f_K = 3,5$  N. Die Anzahl der Ansatzfunktionen für die Teilsysteme ist wie folgt,

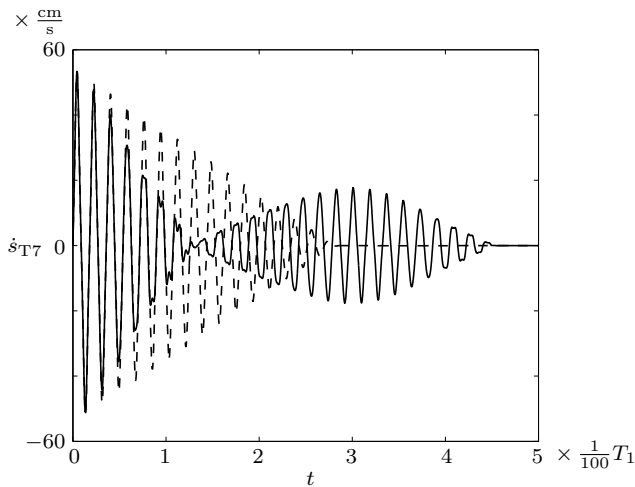
Balken oben:	8
Balken unten:	8
Stab oben:	2
Stab unten:	2
Anzahl der Freiheitsgrade:	20

Die Rechenzeit ist im Vergleich zu Rechnung 1, auf dem gleichen Computer mit den dort beschriebenen Leistungsdaten, gestiegen. Für beide Fälle haben die Rechnungen ungefähr 4,5 h gedauert. Das liegt zum einen an der gestiegenen Anzahl der Freiheitsgrade (20 gegenüber 12), zum anderen an der aufwändigeren Berechnung der Kontaktzustände durch das LCP. Aufgrund der benötigten Hilfswerte im *Heun*-Verfahren wurden in dieser Zeit für jede Rechnung mehr als eine halbe Million LCP gelöst.

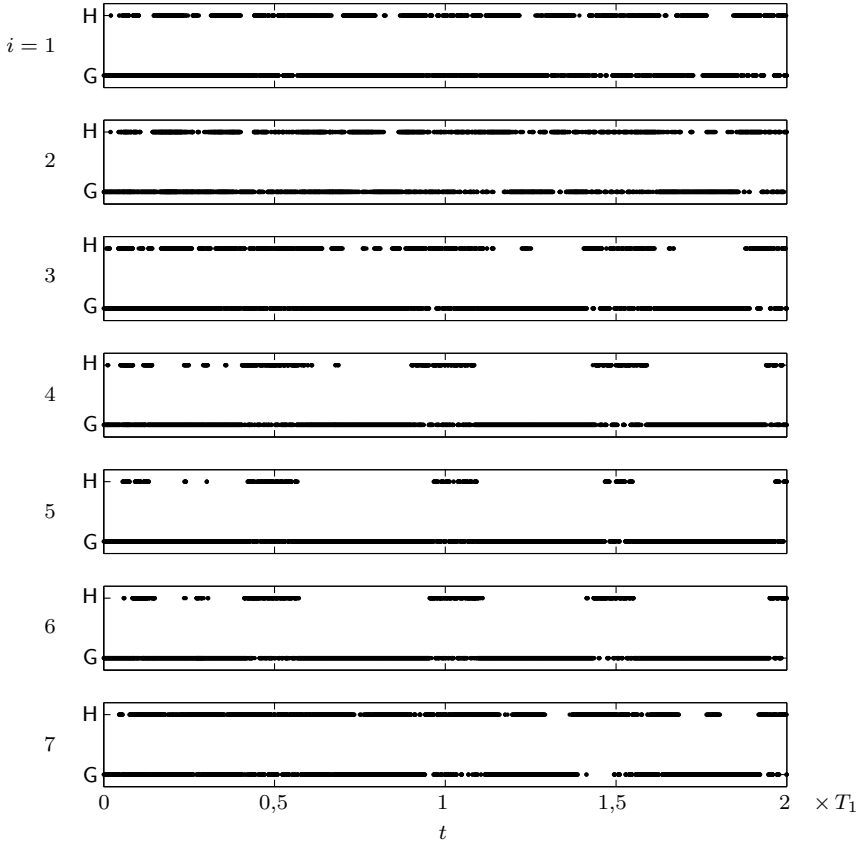
Der Fall 1 zeigt gegenüber Fall 2 eine feinere Aufteilung in Haft- und Gleitzonen. Dabei sind die kurzen Phasen gleichen Kontaktzustandes (siehe Abb. 4.11) nicht der numerischen Auflösung geschuldet. Auch bei kleineren Schrittweiten bleibt die Haft- und Gleitverteilung nahezu gleich. Die Dissipation über die Zeit zeigt das gleiche Verhalten wie in Rechnung 1; auch die Veränderungen in den Normalkräften sind nur gering, wie das Beispiel des siebten Kontaktes zeigt (Abb. 4.8). Die ungleiche Massenverteilung im Fall 1 führt jedoch zu großen Unterschieden in der lokalen Dynamik, wie man an der Tangentialgeschwindigkeit des siebten Kontaktes sehen kann (siehe Abb. 4.9).



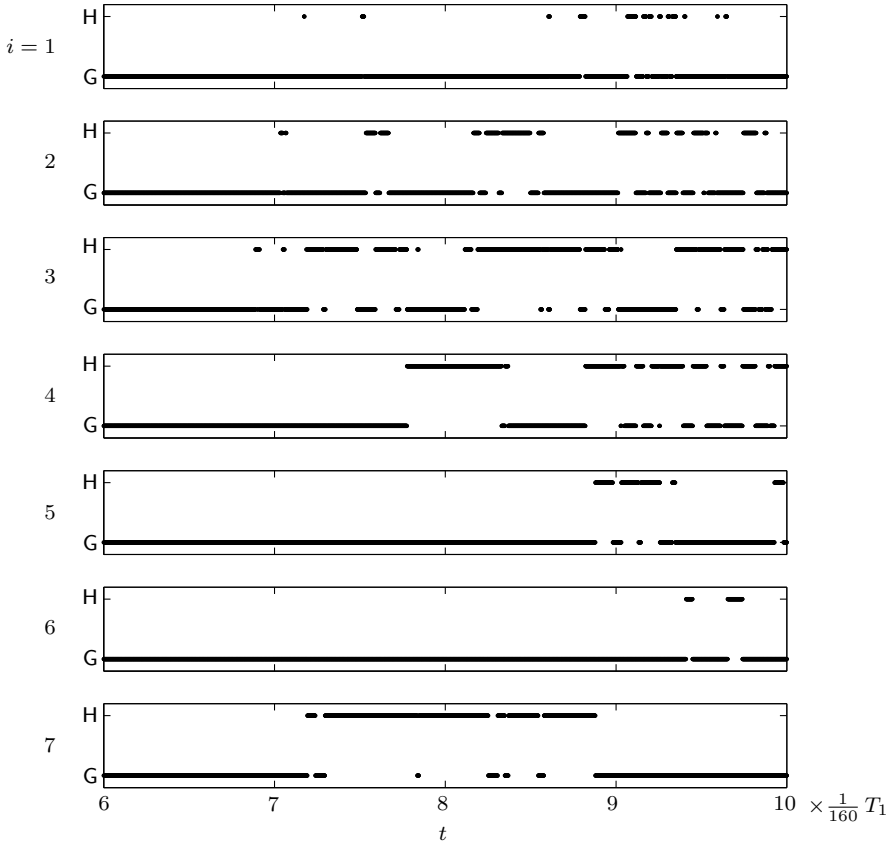
**Abbildung 4.8:** Verlauf der Normalkraft im siebten Kontakt. Die Normalkraft ist für symmetrische Massenverteilung,  $\kappa = 0,5$  (—) wie erwartet konstant, während sie für  $\kappa = 1$  (—) um bis zu 2% schwankt.



**Abbildung 4.9:** Die Relativgeschwindigkeit im siebten Kontakt zu Beginn der Simulation. Die unterschiedliche Massenverteilung in den Fällen  $\kappa = 0,5$  (—) und  $\kappa = 1$  (—) führt zu unterschiedlichen Geschwindigkeitsverläufen.



**Abbildung 4.10:** Haft- und Gleitverteilung (H/G) bei unbekannter Normalkraft ( $\kappa = 1$ ). Die beschränkte Auflösung der Zeichnung führt dazu, dass sich die ausschließenden Kontaktzustände nicht überall unterscheiden lassen (Vergrößerung in Abb. 4.11).



**Abbildung 4.11:** Detail der Haft- und Gleitverteilung (H/G) bei unbekannter Normalkraft ( $\kappa = 1$ ). Zu Beginn der Simulation befinden sich alle Kontakte im Gleitzustand, kurz nach  $t = \frac{6}{160} T_1 = 0,012\text{s}$  treten die ersten Haftzustände auf.



## 5 Die Regelung von Balken durch Reibung

### 5.1 Einleitung

Die Regelung von dynamischen Systemen über raue Kontakte ist bisher vor allem an einzelnen Verbindungen untersucht worden [17, 25, 46, 60, 81]. Die Beschränkung auf einen einzelnen Kontakt erleichtert die Untersuchung, da keine gegenseitige Kopplung von Reibkräften auftreten kann. Die zitierten Arbeiten verwenden dabei verschiedene Regelungsgesetze und Reibmodelle. Die gegenüber dem *Coulomb*-Gesetz komplexeren Reibmodelle berücksichtigen zusätzliche Abhängigkeiten. Dadurch erschwert ihre Verwendung die Untersuchung der Phänomene, die durch das Auftreten von Haften und Gleiten entstehen, besonders in der Umgebung verschwindender Relativgeschwindigkeit. Im Folgenden wird deshalb weiterhin das einfache Reibkraftmodell von *Coulomb* verwendet.

Nachfolgend wird vorausgesetzt, dass alle Reibkontakte des dynamischen Modells geregelt sind. Allgemein gilt damit ein Bewegungsgesetz ähnlich zu Gl. (4.61). Ersetzt man die vorgegebene Schraubenkraft  $\mathbf{f}_0$  durch die Stellkraft  $\mathbf{u}$ , ergibt sich

$$\begin{array}{|l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + \mathbf{G}_N \mathbf{f}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T - \mathbf{G}_N \mathbf{u} \quad \text{mit} \\ \text{Kontaktbedingungen für } \mathbf{f}_T \text{ und } \mathbf{f}_N. \end{array} \quad (5.1)$$

Gl. (5.1) enthält den in Kapitel 4.2 behandelten Sonderfall mit bekannter Normalkraft,

$$\begin{array}{|l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T(\mathbf{u}) \quad \text{mit} \\ \text{Kontaktbedingungen für } \mathbf{f}_T. \end{array} \quad (5.2)$$

Für diesen Fall gibt die Stellkraft unmittelbar die Haftgrenze für  $\mathbf{f}_T$  vor. Der Vektor  $\mathbf{h}$  beinhaltet alle Kräfte, die nicht durch Kontakt entstehen, oder durch die Stellkraft  $\mathbf{u}$  vorgegeben sind. Alle anderen Größen sind wie bisher definiert. Die Stellkraft ist eine Funktion des noch zu bestimmenden Zustandes,

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad u_i \leq (u_{\max})_i. \quad (5.3)$$

Das Einsetzen von Gl. (5.3) in (5.2) oder (5.1) führt jeweils auf die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises. Der Einfluss von unbekannten Störungen und Aktor-Dynamik oder die Frage nach nicht-beobachtbaren Zustandsgrößen sollen vorerst zurückgestellt werden. Im Vordergrund steht hier die Frage nach den Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit eines speziellen Rückführungsgesetzes in Gl. (5.3). Für eine spätere technische Realisierung

der Regelung müssen weitere Fragen beantwortet werden. Dieser Abschnitt konzentriert sich auf die Eigenschaften der Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises der Gl. (5.1) und (5.2). Ziel der Regelung ist in jedem Fall, noch ohne mathematische Formalisierung, eine möglichst hohe Dissipationsrate.

Die Differentialgleichungen (5.2) und (5.1) sind unabhängig von der genauen Form der Rückführung autonom. Das Vektorfeld im Phasenraum ist also unabhängig von der Zeit. Damit gelten — Eindeutigkeit und Existenz der Tangentialkräfte vorausgesetzt — Haft- oder Gleitbedingungen bezüglich jedes Punktes einer einzelnen Diskontinuitätsfläche. Die *Lagrange*-Multiplikatoren zu der Tangentialkraftbestimmung in der Optimierungsaufgabe sind also entweder aktiv (Gleiten) oder inaktiv (Haften). Deshalb lässt sich  $\mathcal{M}_i$  in eine Teilmenge mit Hafteigenschaften, dem Haftraum  $\mathcal{M}_{Hi}$ , und mit Gleiteigenschaften, dem Gleitraum  $\mathcal{M}_{Gi}$ , unterteilen,

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{Gi} \cup \mathcal{M}_{Hi}, \quad \mathcal{M}_{Gi} \cap \mathcal{M}_{Hi} = \emptyset. \quad (5.4)$$

Identifiziert man die Indizes der Hyperebenen  $\mathcal{M}_i$  mit den Elementen der Kontaktmenge  $\mathcal{I}_K$ , entspricht die Index-Menge der haftenden Kontakte

$$\mathcal{I}_H = \{i_1, i_2, \dots\}, \quad \mathcal{I}_H \subseteq \mathcal{I}_K, \quad (5.5)$$

der Zugehörigkeit von  $\mathbf{x}$  zur Schnittmenge der entsprechenden Hafträume,

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}_H} \mathcal{M}_{Hi}. \quad (5.6)$$

Es ist vorteilhaft, die Vereinigungsmenge aller Punkte auf Diskontinuitätsflächen als Gesamtdiskontinuitätsraum zu definieren,

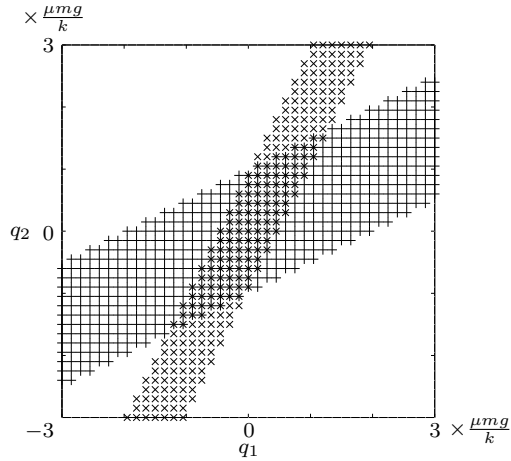
$$\mathcal{M}_K := \bigcup_{i \in \mathcal{I}_K} \mathcal{M}_i. \quad (5.7)$$

Die Vereinigung aller Punkte des Phasenraums, in denen wenigstens an einem Kontaktpunkt Haften herrscht, wird im Folgenden Gesamthaftraum genannt,

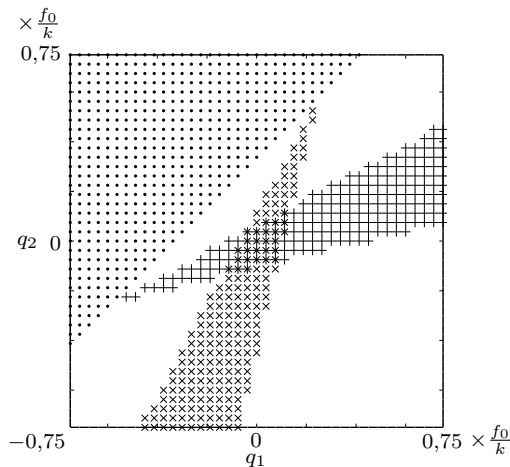
$$\mathcal{M}_H := \bigcup_{i \in \mathcal{I}_K} \mathcal{M}_{Hi} \quad (5.8)$$

(siehe Abb. 5.1 und 5.2).





**Abbildung 5.1:** Gesamthafttraum am Beispiel des Systems aus Kap. 3.3, Seite 25. In dieser Rechnung liegt für beide Kontakte vorläufiges Haften vor. Für die Projektion des Kontaktzustandes aus dem Phasenraum auf den Unterraum der Lagekoordinaten sind an einzelnen Punkten die unterschiedlichen Haftzustände eingetragen. 'x':  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{H1}$ , '+':  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{H2}$  und '\*':  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{H1} \cap \mathcal{M}_{H2}$ . Die Menge aller gekennzeichneten Punkte ist eine numerische Annäherung an die Projektion des Gesamthafttraums  $\mathcal{M}_H$ .



**Abbildung 5.2:** Gesamthafttraum am Beispiel aus Kap. 3.4, Seite 29. Bei verschwindenden Relativgeschwindigkeiten sieht man die Projektion der Mengen  $\mathcal{M}_{H1}$  und  $\mathcal{M}_{H2}$  auf den Raum der Lagekoordinaten (Bezeichnungen siehe Abb. 5.1). Für Lagen in dem gepunkteten Gebiet heben beide Körper ab, es existieren also keine Tangentialkräfte im Sinn der Problemstellung (3.79).

## 5.2 Regelungskonzepte

### 5.2.1 Der Fall bekannter Normalkraft

Die fehlende Differenzierbarkeit der rechten Seite der Gl. (5.1) und (5.2) und die komplementären Nebenbedingungen erschweren die regelungstheoretische Untersuchung. Eine Vereinfachung für Gl. (5.2), im Fall eines einzigen Reibkontaktes von Lane [46] untersucht, ist

$$u_i = d_i |\dot{s}_{Ti}|, \quad d_i > 0, \quad i \in \mathcal{I}_K. \quad (5.9)$$

Da bei verschwindender Relativgeschwindigkeit  $\dot{s}_{Ti}$  die Stellkraft Null wird, treten keine Haftzustände mehr auf. Durch den Betrag wird eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung eingeführt. Mit

$$\mathbf{\Lambda}_D := \text{diag}([d_1 \quad d_2 \quad \cdots]) \quad (5.10)$$

wird Gl. (5.2) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{h} + \mathbf{G}_T \mathbf{f}_G \\ &= \mathbf{h} - \mathbf{G}_T \mathbf{\Lambda}_D \dot{\mathbf{s}}_T \\ &= \mathbf{h} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die eingeführte Dämpfungsmatrix

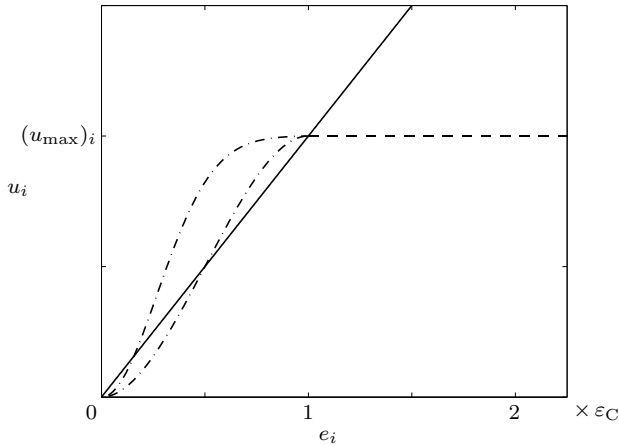
$$\mathbf{D} = \mathbf{G}_T \mathbf{\Lambda}_D \mathbf{G}_T^T \quad (5.12)$$

ist symmetrisch und positiv semidefinit. Das Vorliegen von durchdringender Dämpfung muss im konkreten Fall überprüft werden.

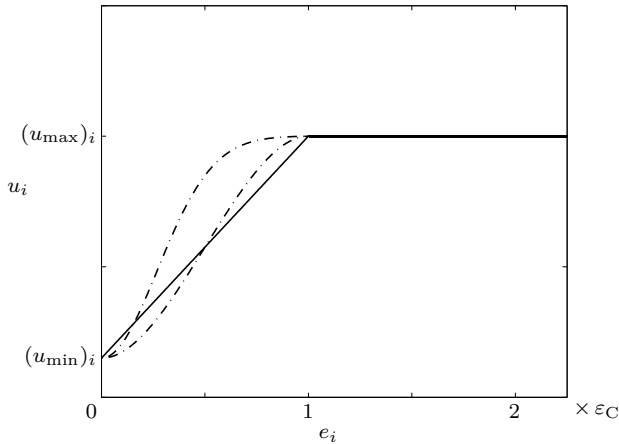
In [46] wird für einen einzelnen Reibkontakte ein quadratisches Gütefunktional eingeführt. In diesem werden der Zustand und Regelungsaufwand berücksichtigt. Das daraus entstehende 'linear quadratic regulator'-Problem (LQR) führt auf eine *Riccati*-Gleichung mit der stationären Lösung  $u_{\text{opt}}$ . Als Normalkraft aus einem Kontakt muss die Stellkraft immer positiv sein. Wählt man

$$u = \max\{u_{\text{opt}}, 0\}, \quad (5.13)$$

erhält man das sogenannte 'clipped LQR'. Die Regelung ist für mehrere Kontakte aufwändig, und durch die Einschränkung der Positivität suboptimal. An dieser Stelle wird ein einfacherer Ansatz verfolgt. Die Regelparameter werden so gewählt, dass die dadurch entstehende Dämpfungsmatrix die Verlustleistung maximiert.



**Abbildung 5.3:** Der Übergang zwischen numerischem Gleit- und Haftgebiet. Im Ansatz von *Lane* hängt die Regelung linear von  $e_i$  ab (—), wobei die Beschränkung der Stellkraft berücksichtigt werden kann (---). Soll die Stellkraft bei der Durchquerung von  $\mathcal{M}_i$  differenzierbar sein, sind Glättungen der Art (- · -) möglich, die zu verschiedenen Funktionen  $f(e_i)$ ,  $e_i \leq \varepsilon_C$ , führen.



**Abbildung 5.4:** Der Übergang zwischen numerischem Gleit- und Haftgebiet bei unbekannter Normalkraft. Die Stellkraft ist für alle Kontakte durch  $(u_{\min})_i$  und  $(u_{\max})_i$  beschränkt. Die Funktionen  $f(e_i)$ ,  $e_i \leq \varepsilon_C$ , können linear sein (—), oder auf verschiedene Arten und Weisen geglättet (- · -)

Multipliziert man im allgemeinen Fall Gl. (5.1) mit der generalisierten Geschwindigkeit, erhält man die zeitliche Änderung der kinetischen Energie<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}_N \mathbf{f}_N + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}_T \mathbf{f}_T + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}_N \mathbf{u} \\ &= \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h}}_{=: P_A} + 0 + \underbrace{\dot{\mathbf{s}}_T^T \mathbf{f}_T}_{=: P_T} + 0.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Die Leistung der Kräfte in Normalenrichtung ist immer Null, da die zugehörige Zwangsbedingung ohne Abheben identisch erfüllt ist. Die actio/reactio-Paare verrichten in der Summe also keine Arbeit. Die Tangentialkräfte sind im Gleitfall den Geschwindigkeiten entgegengesetzt und verrichten im Haftfall keine Arbeit. Deshalb gilt

$$P_T \leq 0. \quad (5.15)$$

Der Energieeintrag durch die Kontaktkräfte ist wie erwartet negativ, unabhängig von der Wahl einer Rückführung. Ob der Energiegehalt des Systems zunimmt, hängt von  $\mathbf{h}$  ab. Da die Kräfte der in dieser Arbeit untersuchten Systeme im vollständigen Haftfall konservativ sind, nimmt die Gesamtenergie unabhängig von der gewählten Regelung nicht zu. Unter den gewählten Voraussetzungen ist die Frage nach der Stabilität eines Regelungsentwurfs deshalb hinfällig. Die Reibkräfte reduzieren für jede mögliche Regelung durch  $\mathbf{u}$  die Gesamt-Energie. Alle Überlegungen zur Leistungsbilanz gelten auch für das einfache System der Gl. (5.2).

Im konkreten Fall der Regelung (5.9) gilt

$$\begin{aligned}P_T &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{\mathbf{s}}_T^T \mathbf{\Lambda}_D \dot{\mathbf{s}}_T \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_K} (\dot{s}_{Ti})^2 d_i.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Soll eine Regelung für jeden Zeitpunkt maximal mögliche Dissipation zum Ziel haben, müssen alle  $d_i$  so hoch wie möglich gewählt werden. Die Beschränkung von  $u_i$  führt dazu, dass sich die Wahl eines Regelungskonzeptes auf den Übergang zwischen  $u_i = 0$  und  $u_i = (u_{\max})_i$  beschränkt, und zwar in der Umgebung verschwindender Relativgeschwindigkeit. Diese Umgebung muss im Hinblick auf eine technische Umsetzung ausreichend groß sein. 'Ausreichend' bedeutet die Einhaltung der Bedingung

$$e_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) > \varepsilon_C : \quad u_i = (u_{\max})_i. \quad (5.17)$$

Das Konzept eines invarianten Maßes  $e_i$  für den Abstand zur Diskontinuitätsfläche  $\mathcal{M}_i$  wurde in Gl. (4.38) eingeführt, im Zusammenhang mit Fragen zur

<sup>1</sup>Dieser Zusammenhang gilt nur für eine quadratische Form der kinetischen Energie, was für alle hier untersuchten Systeme zutrifft (siehe auch *Meirovitch* [55, S.77]).

numerischen Integration. Für den Bereich in der Umgebung der Diskontinuitätsfläche gilt dann eine eingeschränkte Stellkraft als Funktion  $f$  des Abstandes

$$e_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \varepsilon_C : \quad u_i = f(e_i) \quad (5.18)$$

(siehe Abb. 5.3 und 5.4).

Die Einschränkung der maximalen Stellkraft auf einen Bereich außerhalb des um  $\varepsilon_C$  erweiterten Gesamtdiskontinuitätsraums ist größer als notwendig. Wenn sich  $\mathbf{x}$  auf einer der Diskontinuitätsflächen im Gleitbereich befindet, kann die Stellkraft maximal bleiben. Der eigentlich zu berücksichtigende Bereich für reduzierte Stellkräfte ist der um  $\varepsilon_C$  erweiterte Gesamthafttraum. Auch wenn die Einteilung in Haft- und Gleitgebiete vor Beginn der Integration festliegt, sind diese Gebiete in einer praktischen Rechnung unbekannt, und werden erst bei Bedarf als 'benachbarte Kontaktzustände' berechnet.

Die Erhöhung der Stellkraft bei benachbartem Gleitzustand und die Verringerung bei benachbartem Haftzustand führt zu Problemen. Die Stellkraft springt bei beinahe jedem Rechenschritt um einen größeren Wert, ein Vorgang, der wegen der vielen hochfrequenten Schaltvorgänge technisch schwer umsetzbar ist, und die eingesetzten Geräte beschädigen kann. Der Grund für diese hochfrequenten Änderungen liegt darin, dass ein benachbartes Gleitgebiet zu einer größeren Kraft  $u_i$  führt, diese zu einem Haftgebiet, dieses zu einer verringerten Kraft, und dieses wiederum zu einem benachbarten Gleitgebiet. Wenn das Rückführungsgesetz Kontaktzustände berücksichtigen soll, ist es schwer, diese Kontaktzustände für den geschlossenen Regelkreis zu bestimmen. Eine Regelung der Art (5.9) führt allerdings dazu, dass per Definition keine Hafträume mehr auftreten. Allerdings können so vorteilhafte Regelungsentscheidungen teilweise nicht berücksichtigt werden.

Das eben erläuterte Phänomen deutet auf einen in den bisher besprochenen Regelungen enthaltenen Widerspruch: Zum einen soll ein möglichst niedriges Energieniveau erreicht werden, was auch Haftzustände einschließt, zum anderen soll maximale Dissipation möglich sein, was die Aufrechterhaltung von Gleitzuständen erfordert. Die Lösung für dieses Problem ist die Vorgabe eines minimalen Energiegehaltes, angegeben in Bezug auf eine Vergleichsenergie, zum Beispiel zu Beginn der Integration,

$$x_E := \frac{\|\mathbf{x}\|_E}{\|\mathbf{x}(0)\|_E} < \varepsilon_E : \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

(siehe Gl. 4.37).

Die bisherigen Überlegungen führen zu der folgenden Regelung, bei der die Funktion  $f(e_i)$  für den Übergang zwischen numerischen Gleit- und Haftgebiet

noch unbestimmt ist,

$$\left| \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{I}_K : \text{ wenn } x_E < \varepsilon_E : u_i = 0, \\ \text{sonst } \begin{cases} e_i \leq \varepsilon_C : u_i = f(e_i), \\ e_i > \varepsilon_C : u_i = (u_{\max})_i \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Die Steigung der Funktion  $f(e_i)$  entspricht dabei einer viskosen Dämpfung, die möglicherweise noch geschwindigkeitsabhängig ist (siehe Abb. 5.3).

Das Regelungskonzept in Gl. (5.20) wird aufgrund der Eigenschaft (5.15) in allen Fällen dämpfen. Eine Einschätzung der Qualität geschieht am besten durch den Vergleich mit einem durch Reibung passiv gedämpften System. Dazu wird angenommen, dass die maximal mögliche Stellkraft des semiaktiven Falls genau so groß ist wie die konstante Normalkraft im passiven Fall.

Zuerst wird die Menge der Zeitpunkte untersucht, in denen die Trajektorie ausreichenden Abstand zu den Diskontinuitätsflächen besitzt ( $e_i \geq \varepsilon_C$ ). Bei diesem Abstand gibt es keinen Unterschied zwischen der maximalen Stellkraft im semiaktiven Fall und der voreingestellten Normalkraft gleicher Größe im passiven Fall. Für die Menge der Zeitpunkte mit  $e_i < \varepsilon_C$  gibt es zwei unterschiedliche Tendenzen. Auf der einen Seite ist die Stellkraft in der Umgebung der Diskontinuitätsflächen wegen des Verlaufs von  $f(e_i)$  kleiner als eine Normalkraft des passiven Falls. Die Dissipation ist im Fall semiaktiver Regelung also geringer. Auf der anderen Seite wird durch die Regelung der Haftfall verhindert, was die Dissipation gegenüber dem passiven Fall erhöht. Eine semiaktive Regelung durch Reibung ist also im Vergleich mit passiver Reibdämpfung nur dann von Vorteil, wenn die bei entsprechender konstanter Normalkraft auftretenden Haftzustände verhindert werden.

### Rechnung 3: Das passive System

Um die vorgestellten Regelungskonzepte in numerischen Simulationen zu überprüfen, wird ein System verwendet, das dem von Rechnung 1 (S. 45) ähnelt. Dessen Integration ist numerisch aber weniger aufwändig. Die Simulation behandelt eine Reibleiste, die aus zwei Stahlbändern rechteckigen Querschnittes zusammengesetzt ist. Diese Stahlbänder werden als Balken mit den folgenden Eigenschaften modelliert,

Länge:	$l = 10 \text{ cm}$
Breite:	$b = 3 \text{ cm}$
Höhe:	$h = 1 \text{ cm}$
Dichte:	$\rho = 9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$
E-Modul:	$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$
Reibkoeffizient:	$\mu = 0,5$

Die Verbindung erfolgt durch zwei Schrauben an den Orten

$$x_{K1} = 2,5 \text{ cm}, \quad (5.21)$$

$$x_{K2} = 7,5 \text{ cm}. \quad (5.22)$$

Die zusätzliche Masse durch eine Schraube ist jeweils

$$m = \frac{1}{60} lbh \rho. \quad (5.23)$$

Sie ist gleichmäßig auf den unteren und oberen Balken verteilt. Alle Schrauben haben für die Rechnung den gleichen Anpressdruck. Anfangsbedingung im Ort ist eine statische Verformungslinie für den zusammengesetzten Balken, verursacht durch eine Verschiebung am Balkenende  $w(l, 0) = 1 \text{ cm}$ . Die Anfangsgeschwindigkeit für alle Orte ist Null,  $\dot{w}(x, 0) \equiv 0$ . Die Übertragung auf die diskreten Verschiebungskoordinaten erfolgt wie in Rechnung 1.

Die Anzahl der Kontakte ist eine untere Schranke für die Anzahl der Koordinaten. Deswegen kann gegenüber Rechnung 1 mit weniger Freiheitsgraden gerechnet werden. Als Ansatzfunktionen werden wie in den anderen Beispielen die Eigenfunktionen von Balken und Stäben verwendet (Gl. 4.42–4.44). Die Anzahl der Freiheitsgrade ist für

$n_B$ :	3
$n_O$ :	1
$n_U$ :	1
Anzahl der Freiheitsgrade:	5
Anzahl der Kontakte:	2

Die Schrittweite der numerischen Integration orientiert sich an der höchsten Eigenfrequenz des Systems. Aufgrund der Geometrie ist das Verhältnis von höchster zu niedriger Periode gegenüber Rechnung 1 verbessert,

$$\frac{T_1}{T_4} \approx 15. \quad (5.24)$$

Um den Einfluss der gewählten Schrittweite auf die Untersuchung gering zu halten, wird eine hohe Auflösung gewählt. In den hier vorgenommenen Rechnungen gilt

Zeitraum:	$4 T_1 = 4,90 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
Auflösung:	200 Schritte / $T_4$
Rechenschritte:	12.000
$\varepsilon_0$ :	$2 \cdot 10^{-3}$

Die betrachteten Fälle unterscheiden sich in der voreingestellten Kraft,

- Fall 1:  $f_N = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$   
Fall 2:  $f_N = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$   
Fall 3:  $f_N = 7 \cdot 10^4 \text{ N}$   
Fall 4:  $f_N = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$

Die Rechnungen haben weniger als eine Minute gedauert. Zu den Ergebnissen gehört die Dissipationsrate (Abb. 5.5) und die Verschiebung des Balkenendes (5.6). Sie dienen dem Vergleich mit den folgenden semiaktiven Rechnungen.

#### Rechnung 4: Das semiaktive System im Vergleich zum passiven

Das untersuchte System teilt die meisten Eigenschaften mit dem der Rechnung 3. Dazu gehört die Geometrie, das Material, die Art der Schraubenverbindungen, die Anzahl der Freiheitsgrade und die numerischen Einstellungen für die Integration. Zusätzlich muss die Grenze für maximale Stellkräfte,  $\varepsilon_C$ , festgelegt werden, die maximale Stellkraft selbst,  $u_{\max}$ , und eine Funktion  $f(e_i)$  für die Stellkraft im Intervall  $[0, \varepsilon_C]$ . In allen folgenden Rechnungen gilt die minimale Energieschranke

$$\varepsilon_E = 10^{-2}, \quad (5.25)$$

unter deren Grenze die Stellkräfte zu Null werden.

Als erstes werden die Fälle gemäß dem Regelungsgesetz (5.20) mit unterschiedlicher maximaler Stellkraft verglichen. Der Parameter  $\varepsilon_C$  wird nicht verändert. Für die Übergangsfunktion wird ein linearer Anstieg zwischen  $e_i = 0$  und  $e_i = \varepsilon_C$  verwendet (siehe Abb. 5.3). Die verschiedenen maximalen Stellkräfte haben die gleichen Werte wie die eingestellten Normalkräfte in Rechnung 3,

- Fall 1:  $u_{\max} = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$   
Fall 2:  $u_{\max} = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$   
Fall 3:  $u_{\max} = 7 \cdot 10^4 \text{ N}$   
Fall 4:  $u_{\max} = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$

Für die Änderung der maximalen Stellkraft wird der Energieverlauf untersucht, dargestellt in Abb. (5.7), und die Bewegung der Balkenspitze, zu sehen in Abb. (5.8).

Im Vergleich zu den Fällen festeingestellter Normalkräfte zeigt sich in den Fällen 2, 3 und 4 ein ähnlicher Dissipationsverlauf (siehe Abb. 5.7). Dabei treten auf die gleiche Weise in periodischen Abständen Plateaus auf. Es ist interessant, dass die Höhe der Verlustleistung in beiden Fällen nicht mit der Höhe der Normalkraft, bzw. maximalen Stellkraft korreliert. Die höchste Verlustleistung tritt in beiden Rechnungen für den Fall 2 auf. Ein großer Unterschied besteht beim Vergleich der Fälle mit der höchsten Kraft, denn die



semiaktive Regelung vermeidet Haftzustände und führt das System auf ein niedrigeres Energieniveau. Die Schwingungen der Balkenenden in Abb. 5.8 zeigen, dass die Amplituden bei den semiaktiv geregelten Balken in den Fällen 1, 2 und 3 deutlich geringer sind als die gleichen Fälle in Rechnung 3. Die Stellkraftverläufe in den Abb. (5.13) und (5.14) zeigen hochfrequente Änderungen, deren Frequenz aber beschränkt ist.

Im Folgenden werden noch die Änderungen durch ein größeres Intervall  $[0, \varepsilon_C]$  betrachtet. Dafür wird die maximale Stellkraft des Falles 2 verwendet,  $u_{\max} = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$ . Die untersuchten Fälle sind

Fall 5:  $\varepsilon_C = 5 \varepsilon_0$

Fall 6:  $\varepsilon_C = 20 \varepsilon_0$

Fall 7:  $\varepsilon_C = 40 \varepsilon_0$

Fall 8:  $\varepsilon_C = 80 \varepsilon_0$

Die Ergebnisse in den Abb. (5.9) und (5.10) zeigen, dass der Vorteil der semiaktiven Regelung gegenüber der passiven Variante auch bei großem  $\varepsilon_C$  bestehen bleibt.

Zusätzlich stellt sich die Frage, was für Auswirkungen eine glattere Funktion  $f(e_i)$  gegenüber der bisher verwendeten linearen Funktion hätte. Für diesen Vergleich wird ein Polynom dritter Ordnung eingeführt, dessen vier Koeffizienten aus den folgenden Bedingungen folgen,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(\varepsilon_C) = u_{\max}, \quad f'(\varepsilon_C) = 0. \quad (5.26)$$

Dabei werden für beide Simulationen,

Fall 9:  $f(e_i)$  linear

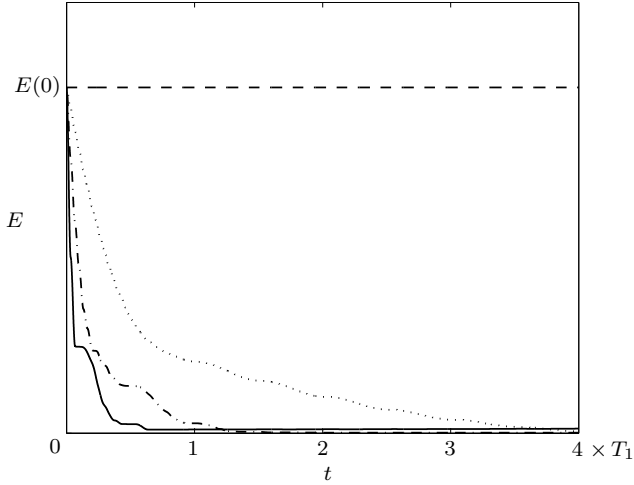
Fall 10:  $f(e_i)$  geglättet

die folgenden Werte verwendet,

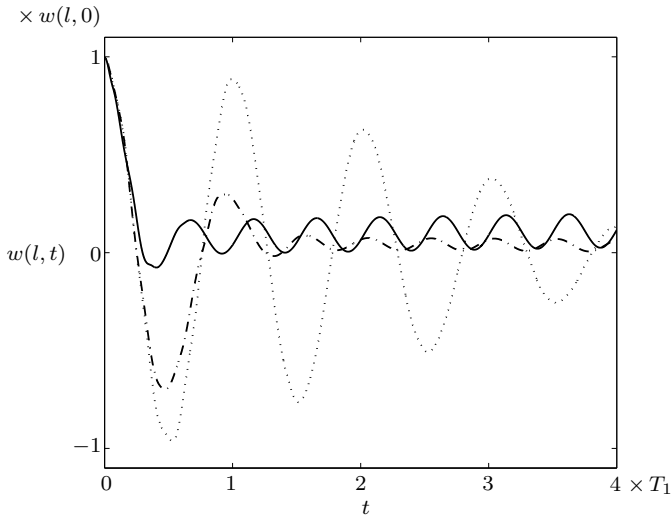
$\varepsilon_C : 10 \varepsilon_0$

$u_{\max} : 2 \cdot 10^5 \text{ N}$

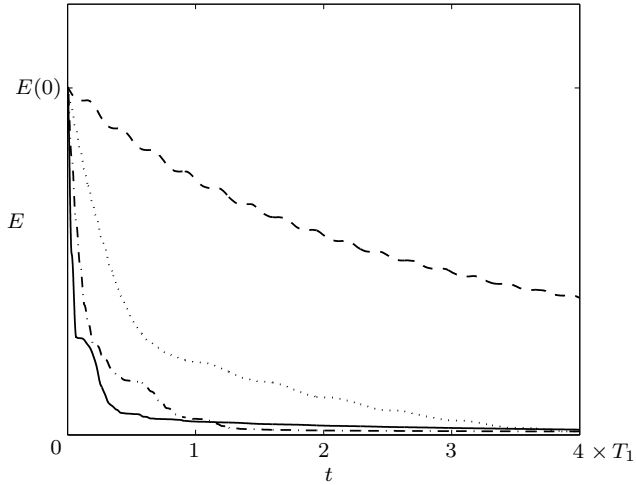
Die Ergebnisse für die Rechnungen der Fälle 9 und 10 sind den Abb. (5.11) und (5.12) zu entnehmen. Die Dissipationsleistung ist für die glattere Funktion  $f(e_i)$  höher, was sich auch in der Bewegung der Balkenenden zeigt. Dieser Unterschied erscheint nicht mehr für einen niedrigeren Wert  $\varepsilon_C = 5 \varepsilon_0$ .



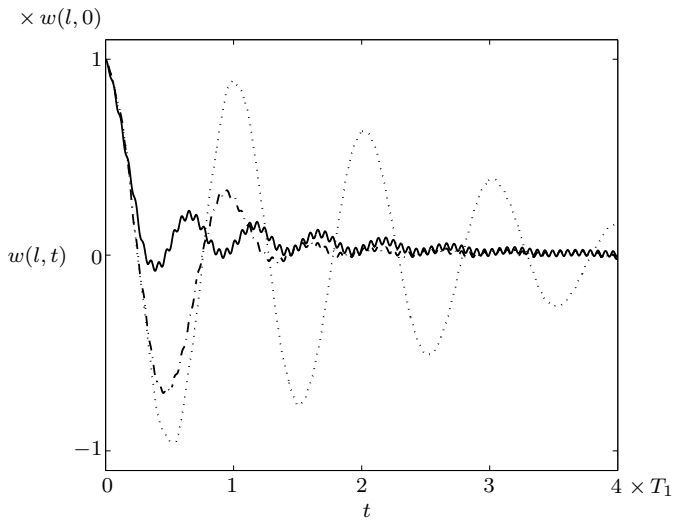
**Abbildung 5.5:** Rechnung 3 (passiv): Energiegehalt des Systems bei unterschiedlichen Normalkräften. Diese Normalkräfte sind konstant und für alle Kontakte gleich. Für  $f_N = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$  (—) haften die Kontakte. Bei den anderen Kräften tritt Gleiten und damit Dissipation auf:  $f_N = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$  (— · —),  $f_N = 7 \cdot 10^4 \text{ N}$  (---),  $f_N = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$  (····).



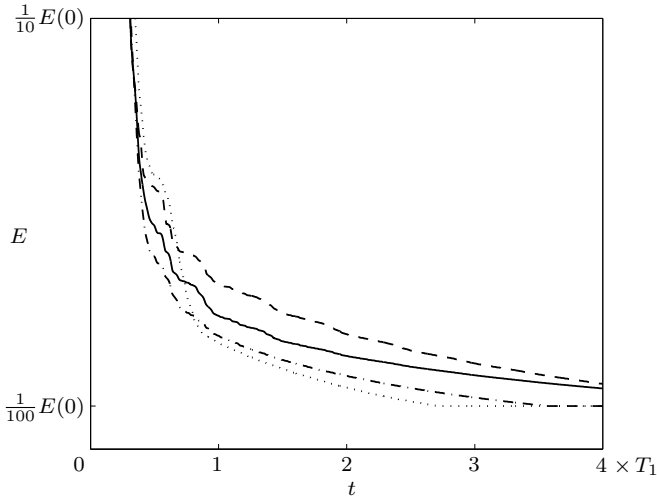
**Abbildung 5.6:** Rechnung 3 (passiv): Bewegung der Balkenspitze für drei Fälle aus Abb. (5.5).



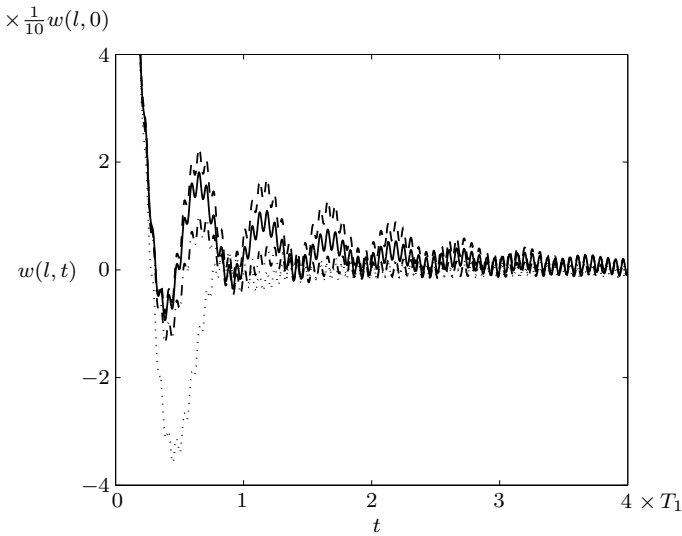
**Abbildung 5.7:** Rechnung 4 (semiaktiv): Energiegehalt des Systems bei unterschiedlichen maximalen Stellkräften. Diese Kräfte sind für alle Kontakte gleich.  $u_{\max} = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$  (—),  $u_{\max} = 7 \cdot 10^4 \text{ N}$  (—),  $u_{\max} = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$  (···).



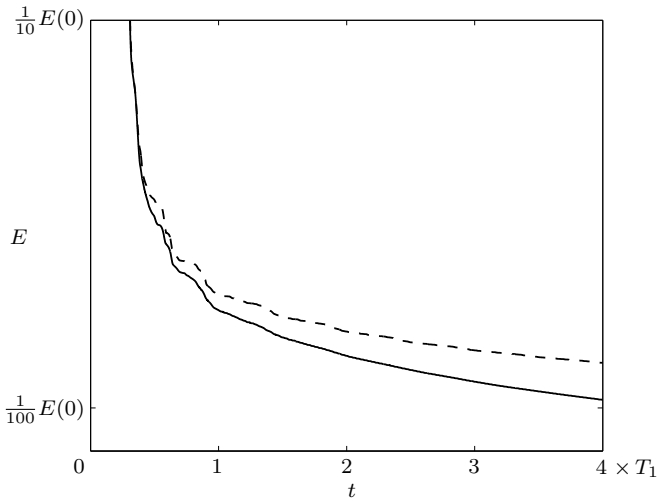
**Abbildung 5.8:** Rechnung 4 (semiaktiv): Bewegung der Balkenspitze für alle Fälle aus Abb. (5.7).



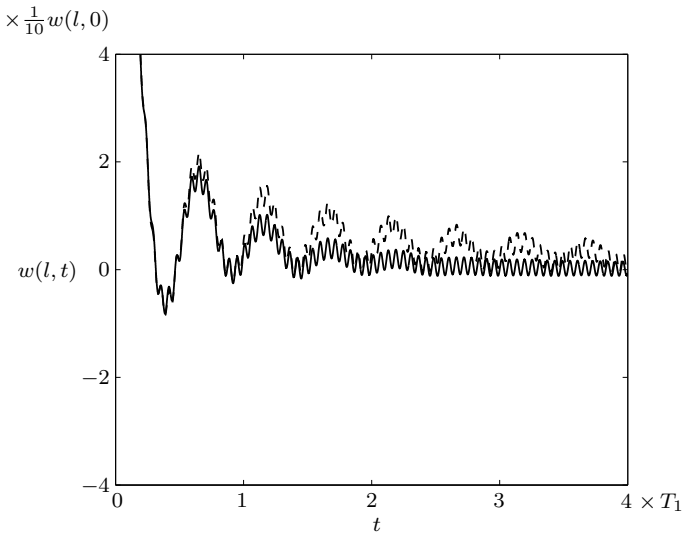
**Abbildung 5.9:** Rechnung 4 (semiaktiv): Dissipationsrate bei unterschiedlich großen  $\varepsilon_C$ . Abgebildet sind Fall 5 (---), Fall 6 (—), Fall 7 (— ·) und Fall 8 (···).



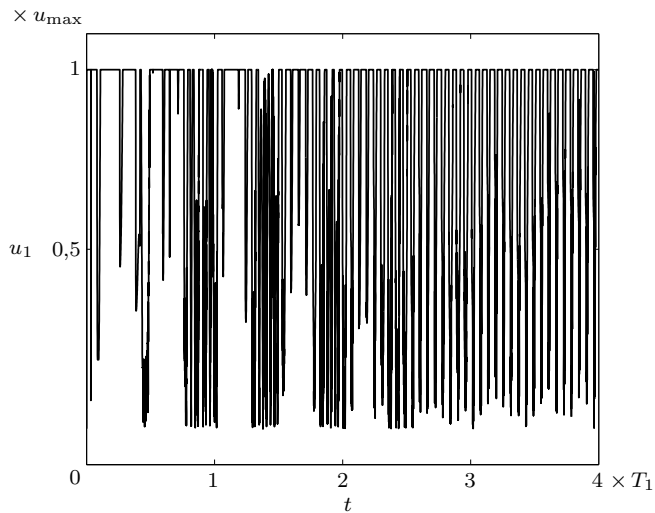
**Abbildung 5.10:** Rechnung 4 (semiaktiv): Bewegung der Balkenspitze für alle Fälle aus Abb. (5.9).



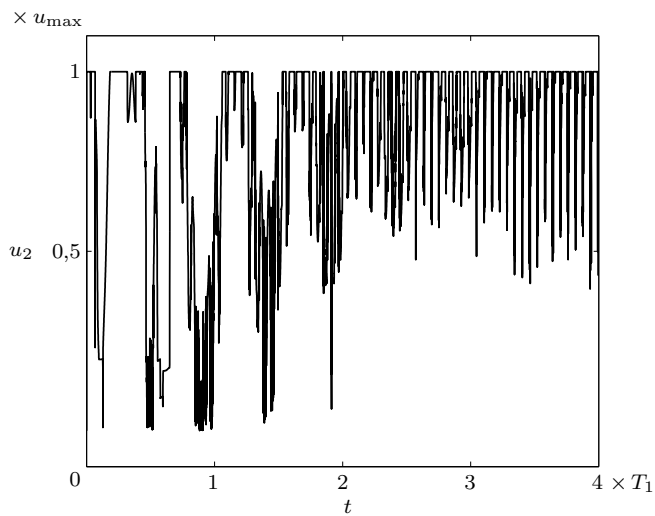
**Abbildung 5.11:** Rechnung 4 (semiaktiv): Dissipationsrate bei unterschiedlichen Funktionsverläufen  $f(e_i)$ . Abgebildet sind der Fall eines linearen Verlaufs (—), und der eines geglätteten Verlaufs (—).



**Abbildung 5.12:** Rechnung 4 (semiaktiv): Bewegung der Balkenspitze für die beiden Fälle aus Abb. (5.11).



**Abbildung 5.13:** Rechnung 4 (semiaktiv): Stellkraft-Verlauf von  $u_1$  im Fall 2.



**Abbildung 5.14:** Rechnung 4 (semiaktiv): Stellkraft-Verlauf von  $u_2$  im Fall 2.

### 5.2.2 Der Fall unbekannter Normalkraft

Alle vorherigen Überlegungen zu einer Regelung hatten die Bedingungen der Gl. (5.4) als Voraussetzung. Darin enthalten ist die Existenz der Tangentialkräfte. Die Menge aller Zustände  $\mathbf{x}$ , für die ein Kontaktpunkt abhebt, und in dem damit keine Tangentialkräfte bestehen (im Sinn von Problemstellung 3.79) heißt im Folgenden Gesamtdefektraum,

$$\mathcal{M}_D := \{\mathbf{x} : \exists i, f_{Ni} = 0\}. \quad (5.27)$$

Unter der Bedingung  $f_{Ni} = 0$  wird ein aktiver *Lagrange*-Multiplikator des LCP verstanden. Dann erweitert sich die Aufteilung der Diskontinuitätsfläche gegenüber (5.4). Zustände, die gleichzeitig zum Gesamtdefektraum und einer bestimmten Diskontinuitätsfläche gehören, bilden den Defektraum zu dem Kontakt,

$$\mathcal{M}_{Di} := \mathcal{M}_D \cap \mathcal{M}_i. \quad (5.28)$$

Elemente dieses Defektraumes sollen keine Elemente des entsprechenden Gleit- und Hafttraumes sein. Dann teilt sich die Diskontinuitätsfläche in

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{Gi} \cup \mathcal{M}_{Hi} \cup \mathcal{M}_{Di} \quad (5.29)$$

auf (siehe Abb. 5.2). Ein nichtleerer Gesamtdefektraum kann nur für Gl. (5.1) auftreten. In diesem Fall ist also für jede Regelung zu berücksichtigen, dass die Zustände nicht Element des Gesamtdefektraumes werden. Keiner der Kontakte hebt ab.

Das automatische Vermeiden von Abheben durch die Rückführung  $\mathbf{u}$  trifft auf ähnliche Probleme, wie sie im Kap. (5.2.1) für die Vermeidung des Haftzustandes beschrieben sind. Wenn die Defektmengen nicht per Regelungsgesetz sicher leer sind, muss die Rückführung dafür Sorge tragen, allerdings ohne die Lage dieser Mengen im voraus zu kennen. Die Elemente der Defektmengen sind wie die Zuordnungen zu Haft- und Gleitmengen für ein festes Regelungsgesetz unabhängig von der Zeit. Wenn die Regelung nun benachbarte Kontaktzustände berücksichtigt, kommt es zu den gleichen mathematischen Problemen wie sie oben beschrieben sind. Bei der vorläufigen Annahme der Defekträume im Rückführungsgesetz ist es schwer, die endgültigen Räume für den geschlossenen Regelkreis zu bestimmen. Aus diesem Grund muss das Einhalten von Kontakt aus den im voraus berechneten unteren Schranken der  $u_i$  folgen.

Der Zusammenhang zwischen Normalkräften  $\mathbf{f}_N$  und Stellkräften  $\mathbf{u}$  in Gl. (5.1) steht im Allgemeinen erst während der Integration fest. Im besonderen Fall der Reibleiste ist aber eine Abschätzung möglich. Wegen Gl. (4.7) gilt

$$\forall i : u_i \geq (u_{\min})_i \geq \max_t \left| \frac{1 - 2\kappa}{2} m \ddot{w}(x_{Ki}, t) \right|. \quad (5.30)$$

Bei einer sinnvoll angenommenen Obergrenze für die Beschleunigungen kann so

eine Untergrenze für die Normalkräfte angegeben werden. Je höher man diese allerdings wählt, desto wahrscheinlicher treten auch Haftzustände auf den Diskontinuitätsmengen auf, bei denen nicht mehr dissipiert wird. Dann ist das Regelungsgesetz unter Berücksichtigung einer unteren Energieschranke, siehe Abb. 5.4,

$$\forall i \in \mathcal{I}_K : \quad \text{wenn } x_E < \varepsilon_E : u_i = (u_{\min})_i, \\ \text{sonst} \quad \begin{cases} e_i \leq \varepsilon_C : u_i = f(e_i) \\ e_i > \varepsilon_C : u_i = (u_{\max})_i \end{cases} \quad (5.31)$$

### Rechnung 5: Der Vergleich passiv/semiaktiv bei unbekannten Normalkräften

Wenn gegenüber dem System der Rechnung 3 die Schraubenmassen nicht mehr zu gleichen Teilen auf den oberen und unteren Balken verteilt werden, entsteht eine Differentialgleichung der Form (5.1). Es wird angenommen, dass die Schraubenmasse vollständig auf dem oberen Balken angebracht ist,

$$\kappa = 1. \quad (5.32)$$

In diesem Fall müssen für die Diskretisierung unterschiedliche Funktionen für beide Balken angenommen werden (siehe Kap. 4.3). Unter den bisher in allen Rechnungen verwendeten Annahmen für die Anfangsbedingungen und Ansatzfunktionen werden die Anzahl der jeweiligen generalisierten Koordinaten festgelegt,

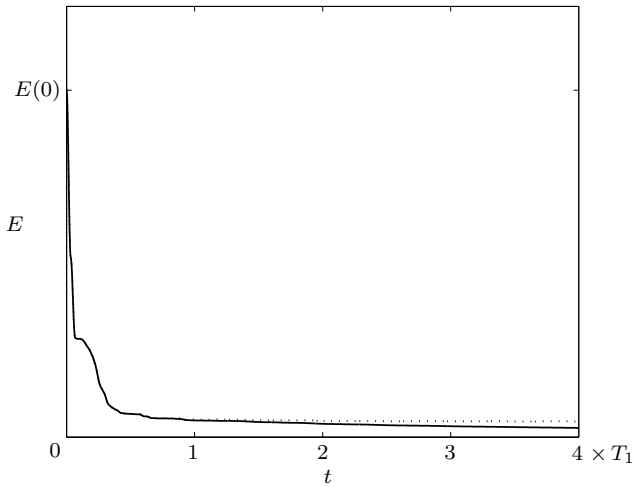
Balken oben:	3
Balken unten:	3
Stab oben:	1
Stab unten:	1
Anzahl der Freiheitsgrade:	8
Anzahl der Kontakte:	2

In dem Fall unbekannter Normalkräfte muss der Regelung eine minimale Stellkraft vorgegeben werden (siehe Gl. 5.31). Damit wird das Abheben in den Kontaktpunkten vermieden. Für die Grenzen der Stellkraft gilt

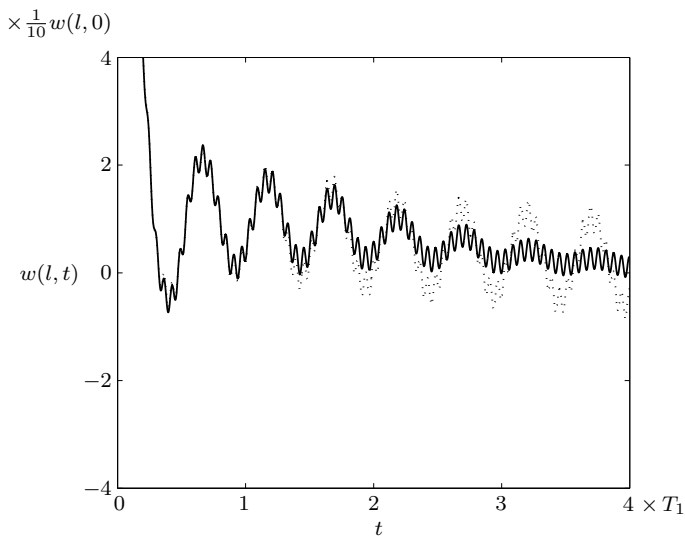
$$u_{\min}: \quad 10^4 \text{ N} \\ u_{\max}: \quad 2 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Die Ergebnisse der Rechnung zeigen Abb. (5.15) und (5.16). Auch für den Fall unbekannter Normalkraft erreicht die semiaktive Regelung höhere Dissipationsleistungen.





**Abbildung 5.15:** Rechnung 5: Dissipationsrate im Vergleich von passiver Dämpfung ( $\cdots$ ) und semiaktiver Regelung ( $\text{—}$ ).



**Abbildung 5.16:** Rechnung 5: Bewegung der Balkenspitze für die beiden Fälle aus Abb. (5.15).



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden zum einen verschiedene mechanische Modelle für Reibleisten aufgestellt. Diese bilden ein interessantes Beispiel für häufig auftretende mechanische Systeme der Art, dass mehrere raue, zeitlich ununterbrochene Kontakte auftreten. Der raue Kontakt zwischen den Balken führt dabei zu unilateralen Zwangsbedingungen. Die zugehörigen Zwangskräfte kommen dann nicht aus einer expliziten Gleichung, sondern müssen ein System von Gleichungen und Ungleichungen erfüllen. Diese sogenannten komplementären Bedingungen führen auf Optimalitätsprobleme, die diese Arbeit in allgemeiner Form herleitet. Dabei treten zwei unterschiedliche Fälle auf. Wenn die Normalkräfte in den Kontakten bekannt sind, tritt ein quadratisches Minimierungsproblem (QP) auf. Wenn die Normalkräfte während der Rechnung unbekannt sind und Gleiten auftritt, muss eine Erweiterung des QP verwendet werden, ein lineares Komplementaritäts-Problem (LCP).

Auch im einfacheren Fall bilateraler Bindungen ist es möglich, ein (unrestringiertes) Optimierungsproblem für die Berechnung der Zwangskräfte zu finden. In diesem Fall ist es ein quadratisches Minimierungsproblem. Für den Fall bilateraler Bindungen besteht allerdings auch ein Gleichungssystem, dessen Auflösung gegenüber dem QP einen ähnlichen numerischen Aufwand benötigt. Die Formulierung dient vor allem dem Nachweis, dass Zwangskräfte allgemein aus Optimierungsproblemen berechnet werden können.

Ziel der Arbeit war unter anderem die Herleitung von Bewegungsgleichungen aus diskretisierten Kontinua mit rauem Kontakt im Rahmen von Minimalmodellen. Diese beinhalten nur wenige Freiheitsgrade und haben den Vorteil einer übersichtlichen Verifizierung von Annahmen, die zu dem untersuchten System bestehen. In der Untersuchung von Strukturen mit komplizierter Geometrie mittels finiten Elementen bilden Minimalmodelle häufig eine notwendige Vorstufe, um ein grundsätzliches Verständnis für das technische System zu gewinnen. Für die Reibleiste werden nun verschiedene Minimalmodelle hergeleitet, die höchstens 20 Freiheitsgrade beinhalten.

Die so generierten Bewegungsgleichungen werden über ein *Heun*-Verfahren integriert, dass zu jedem Zeitpunkt das begleitende Optimierungsproblem löst. Voraussetzung dafür ist eine grundsätzliche mathematische Einordnung der Differentialgleichungen, die durch das Auftreten der Tangentialkräfte aus rauem Kontakt die Voraussetzungen klassischer Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise verletzen. Durch die komplementären Kontaktbedingungen treten im Phasenraum Hyperbenen auf, auf denen das Vektorfeld unstetig ist. Eine Möglichkeit, die daraus

entstehenden mathematischen Schwierigkeiten zu bewältigen, sind differentielle Einschließungen. Diese werden definiert und es wird erläutert, auf welche Weise sie bei Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite auftreten.

Zum anderen beschäftigt sich die Arbeit mit semiaktiver Regelung, deren Voraussetzung das Verständnis des dynamischen Modells der Reibleiste ist. Eine solche Regelung verändert durch Stellkräfte die Normalkräfte der Kontakte, so dass die Reibkräfte möglichst hohe Dissipationsleistung verrichten. Auch hier unterscheiden sich zwei Fälle. In dem ersten sind die Normalkräfte gleich den Stellkräften. Die Untersuchung des geschlossenen Regelkreises führt dann auf ein QP. Das untersuchte Regelungskonzept ermöglicht nahezu jeder Zeit das Vermeiden von Haften. Ergebnisse von Rechnungen zeigen, dass die Dissipationsleistungen weit über denen passiver Dämpfung liegen.

Wenn die Normalkräfte auf dynamische Weise mit den Stellkräften zusammenhängen, sind diese unbekannt, und es ist die Einführung eines LCP notwendig. Um in den Kontaktpunkten Abheben zu vermeiden, muss für jede Stellkraft eine untere Schranke bestehen. Diese führt in dem untersuchten Regelungskonzept dazu, dass auch im Fall semiaktiver Regelung Haften auftreten kann. In den untersuchten Systemen war die Dissipationsleistung der semiaktiv geregelten Systeme über der der passiv geregelten. Es ist also in allen untersuchten Fällen vorteilhaft, für die Dissipation von Schwingungsenergie semiaktive Regelungen einzusetzen.

Für die experimentelle Verifikation der Ergebnisse ist bereits ein Versuch aufgebaut. Der Versuchsaufbau besteht aus drei miteinander verschraubten Balken, von denen der mittlere dicker ist als die beiden äußeren. Den Hintergrund bildet die Idee, dass die Schwingungen in einem Balken einer bestehenden Struktur gedämpft werden können, wenn auf diesen oben und unten zwei weitere Balken aufgebracht werden. Diese werden dünn gegenüber der bestehenden Struktur gewählt, um die Steifigkeit nur gering zu beeinflussen (siehe hierzu auch [70, 91]). Eine weiteres Untersuchungsthema sind Balkenabschnitte mit Kontaktbereich, deren  $n$ -malige Aneinander-Kopplung eine Reibleiste mit  $n$  Kontakten ergibt. Eine nähere Untersuchung von Kopplungsmatrizen wäre hilfreich für die Klassifizierung kontaktmechanischer Modelle.

# Literaturverzeichnis

- [1] Amontons, G. Sur l'origine de la résistance dans les machines. In *Memoires*, 206–222 (Académie Royale, 1699)
- [2] André, J. & Seibert, P. Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten I. *Archiv der Mathematik*, **7**(2):148–156 (1956)
- [3] André, J. & Seibert, P. Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten II. *Archiv der Mathematik*, **7**(3):157–164 (1956)
- [4] Armstrong-Hélouvry, B. *Control of Machines with Friction* (Kluwer, 1991)
- [5] Aubin, J.P. & Cellina, A. *Differential Inclusions* (Springer, 1984)
- [6] Becker, J. & Gaul, L. Semi-active control of adaptive friction dampers for structural vibration control. In *Proceedings of IMAC XXV* (Orlando, USA, 2007)
- [7] Bowden, F. & Tabor, D. *Friction and Lubrication* (Wiley, 1956)
- [8] Brogliato, B., ten Dam, A., Paoli, L., Génot, F. & Abadie, M. Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems. *ASME Applied Mechanics Reviews*, **55**(2):107–150 (2002)
- [9] Brogliato, B., Daniilidis, A., Lemaréchal, C. & Acary, V. On the equivalence between complementarity systems, projected systems and differential inclusions. *Systems & Control Letters*, **55**(1):45–51 (2006).
- [10] Bronstein, I.N., Semedjajew, K.A., Musiol, G. & Mühlig, H. *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch, 1997)
- [11] Carter, F.W. On the action of a locomotive wheel. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **112**:151–157 (1926)
- [12] Casciati, F., Magonette, G. & Marazzi, F. *Technology of Semiactive Devices and Applications in Vibration Mitigation* (Wiley, 2006)

- [13] Clarke, F.H. *Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization*. No. 57 in CBMS-NSF Regional Conf. Series in Applied Mathematics (SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1989)
- [14] Cottle, R.W., Pang, J.S. & Stone, R.E. *The Linear Complementarity Problem* (Academic Press, 1992)
- [15] de Coulomb, C.A. Théorie des machines simples. In *Mémoire de Mathématique et de Physique*, vol. 10, 161–342 (Académie Royale, 1785)
- [16] Dontchev, A. & Lempio, F. Difference Methods for Differential Inclusions: A Survey. *SIAM Review*, **34**(2):263–294 (1992)
- [17] Dupont, P., Kasturi, P. & Stokes, A. Semi-active control of friction dampers. *Journal of Sound and Vibration*, **202**(2):203 – 218 (1997)
- [18] Duvaut, G. & Lions, J.L. *Inequalities in Mechanics and Physics*, vol. 219 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* (Springer, 1972)
- [19] Fichera, G. Elastostatic problems with unilateral constraints: The Signorini problem with ambiguous boundary conditions. In *Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica 1962-1963*, 613–679 (Edizioni Cremonese, 1964)
- [20] Filippov, A.F. Differential equations with discontinuous right-hand side. In *American Mathematical Society Translations*, vol. 42 of 2, 199–231 (AMS, 1964). Original Veröffentlichung: Mat Sb. (N. S.) 51(93), 1960, 99–128
- [21] Filippov, A.F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side* (Kluwer, 1988)
- [22] Fromm, H. *Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben*. Dissertation, TU-Berlin (1926)
- [23] Gaul, L. Aktive Beeinflussung von Fügstellen in mechanischen Konstruktionselementen und Strukturen. Patent DE 19702518 A1, Deutsches Patent- und Markenamt (1997)
- [24] Gaul, L. & Lenz, J. Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints. *Acta Mechanica*, **125**(1):169–181 (1997)
- [25] Gaul, L. & Nitsche, R. Friction control for vibration suppression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **14**(2):139–150 (2000)
- [26] Glocker, C. The principles of d'Alembert, Jourdain, and Gauss in nonsmooth dynamics part I: Scleronomic multibody systems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **78**(1):21–37 (1998)

- 
- [27] Glocker, C. *Set-Valued Force Laws* (Springer, 2001)
- [28] Guyomar, D. & Badel, A. Nonlinear semi-passive multimodal vibration damping: An efficient probabilistic approach. *Journal of Sound and Vibration*, **294**(1-2):249–268 (2006).
- [29] Hagedorn, P. & DasGupta, A. *Vibrations in continuous mechanical systems* (Wiley, 2007)
- [30] Hagedorn, P. & Otterbein, S. *Technische Schwingungslehre 2* (Springer, 1989)
- [31] Hale, J.K. *Ordinary Differential Equations* (Wiley, 1969)
- [32] Hamel, G. *Theoretische Mechanik* (Springer, 1967)
- [33] Heemels, W.P.M.H., Schumacher, J.M. & Weiland, S. Linear complementarity systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **60**(4):1234–1269 (2000).
- [34] Hertz, H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für Mathematik, Celle*, **92**:156–171 (1882)
- [35] Hurlebaus, S. & Gaul, L. Smart structure dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**(2):255–281 (2006)
- [36] Ibrahim, R.A. Friction induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part I: Mechanics of contact and friction. *Applied Mechanics Reviews*, **47**(7):209–226 (1994)
- [37] Ibrahim, R.A. Friction induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part II: Dynamics and modeling. *Applied Mechanics Reviews*, **47**(7):227–253 (1994)
- [38] Inaudi, J.A. Modulated homogeneous friction: A semi-active damping strategy. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **26**(3):361–376 (1997)
- [39] Johnson, K.L. *Contact Mechanics* (Cambridge, 1985)
- [40] Kalker, J.J. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact* (Kluwer, 1990)
- [41] Karnopp, D. Active damping in road vehicle suspension systems. *Vehicle System Dynamics*, **12**:291–316 (1983)
- [42] Karnopp, D., Crosby, M.J. & Harwood, R.A. Vibration Control Using Semi-Active Force Generators. *Journal of Engineering for Industry*, **96**(2):619–626 (1974)

- [43] Kim, Y.S. & Wang, K.W. On the sliding mode control of structural vibrations via variable damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **7**(4):335–347 (1993)
- [44] Klarbring, A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **58**(2):175–200 (1986).
- [45] Lanczos, C. *The Variational Methods of Mechanics* (Univ. of Toronto Press, 1949)
- [46] Lane, J.S., Ferri, A.A. & Heck, B.S. Vibration control using semi-active friction damping. *Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos*, **DE-49**:165–171 (1992). ASME-Paper
- [47] Laursen, T.A. *Computational Contact and Impact Mechanics* (Springer, 2002)
- [48] Leine, R.I. *Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type*. Dissertation, Eindhoven University of Technology (2000)
- [49] Leine, R.I., Brogliato, B. & Nijemeijer, H. Periodic motion and bifurcations Induced by the Painlevé paradox. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **21**(5):869–896 (2002)
- [50] Leine, R., Campen, D.V. & Glocker, C. Nonlinear dynamics and modeling of various wooden toys with impact and friction. *Journal of Vibration and Control*, **9**:25–78 (2003)
- [51] Leitmann, G. & Reithmeier, E. Semiactive control of a vibrating system by means of electrorheological fluids. *Dynamics and Control*, **V3**(1):7–33 (1993)
- [52] Liu, Y., Matsuhisa, H. & Utsuno, H. Semi-active vibration isolation system with variable stiffness and damping control. *Journal of Sound and Vibration*, **313**:16–28 (2008).
- [53] Lötstedt, P. Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **61**(12):605–615 (1981)
- [54] May, H. & Panagiotopoulos, P.D. F. H. Clarke’s generalized gradient and Fourier’s principle. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **65**(2):125–126 (1985)
- [55] Meirovitch, L. *Methods of Analytical Dynamics* (McGraw-Hill, 1970)



- 
- [56] Michlin, S.G. *Variationsmethoden der mathematischen Physik* (Akademie-Verlag, 1962)
- [57] Monteiro Marques, M.D.P. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction*, vol. 9 of *Progress in Nonlinear Differential Equations* (Birkhäuser, 1993)
- [58] Moreau, J.J. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In *Nonsmooth Mechanics and Applications* (edited by J.J. Moreau & P.D. Panagiotopoulos), no. 302 in CISM Courses and Lectures (Springer, 1988)
- [59] Naimark, M.A. *Linear Differential Operators, Part I* (Harrap, G. G., 1967)
- [60] Nitsche, R. & Gaul, L. Lyapunov design of damping controllers. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, **V72**(11):865–874 (2003)
- [61] Oden, J.T. & Martins, J.A.C. Model and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **52**:527–634 (1985).
- [62] Painlevé, P. Sur la définition générale du frottement. In *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie de sciences*, vol. 120, 596–599 (Gauthier-Villars, 1895)
- [63] Painlevé, P. Sur les lois du frottement de glissement. In *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie de sciences*, vol. 121, 112–115 (Gauthier-Villars, 1895)
- [64] Panagiotopoulos, P.D. *Inequality Problems in Mechanics and Applications* (Birkhäuser, 1985)
- [65] Park, G. & Inman, D.J. Smart bolts: An example of self-healing structures. *Smart Materials Bulletin*, **2001**(7):5–8 (2001).
- [66] Päsler, M. *Prinzipte der Mechanik* (de Gruyter, 1968)
- [67] Peairs, D.M., Park, G. & Inman, D.J. Practical issues of activating self-repairing bolted joints. *Smart Materials and Structures*, **13**:1414–1423 (2004).
- [68] Pfeiffer, F. & Glocker, C. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley Series in Nonlinear Sciences (Wiley, 1996)
- [69] Pfeiffer, F. & Hajek, M. Stick-slip motion of turbine blade dampers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **338**:503–517 (1992)

- [70] Popp, K., Panning, L. & Sextro, W. Vibration damping by friction forces: Theory and applications. *Journal of Vibration and Control*, **9**(3-4):419–448 (2003)
- [71] Popp, K. & Stelter, P. Stick-slip vibrations and chaos. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **332**(1624):89–105 (1990)
- [72] Preumont, A. *Vibration control of active structures* (Kluwer, 1997)
- [73] Rektorys, K. *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering* (Reidel, 1975)
- [74] Renzi, E. & De Angelis, M. Optimal semiactive control and non-linear dynamic response of variable stiffness structures. *Journal of Vibration and Control*, **11**(10):1253–1289 (2005).
- [75] Rockafellar, R.T. *Convex Analysis* (Princeton, 1972), 2. Aufl.
- [76] Shaw, S. On the dynamic response of a system with dry friction. *Journal of Sound and Vibration*, **108**(2):305–325 (1986)
- [77] Signorini, A. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica*, **18**:95–139 (1959). Engl.: On the elastostatic problem of Signorini with ambiguous boundary conditions
- [78] Smirnov, G.V. *Introduction to the Theory of Differential Inclusions* (AMS, 2002)
- [79] Spencer Jr., B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K. & Carlson, J.D. Phenomenological model for magnetorheological dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, **123**(3):230–238 (1997)
- [80] Stakgold, I. *Boundary Value Problems of Mathematical Physics* (McMillan, 1967)
- [81] Stammers, C.W. & Sireteanu, T. Vibration control of machines by use of semi-active dry friction damping. *Journal of Sound and Vibration*, **209**(4):671–684 (1998)
- [82] Stewart, D.E. A high accuracy method for solving ODEs with discontinuous right-hand side. *Numerische Mathematik*, **58**:299–328 (1990)
- [83] Stewart, D.E. A numerical method for friction problems with multiple contacts. *Journal of the Australian Mathematical Society B/Applied Mathematics*, **37**(3):288–308 (1996)

- [84] Stewart, D.E. & Trinkle, J.C. An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **39**(15):2673–2691 (1996).
- [85] Taubert, K. Differenzverfahren für Schwingungen mit trockener und zäher Reibung und für Regelungssysteme. *Numerische Mathematik*, **26**:379–395 (1976)
- [86] Utkin, V.I. Variable structure systems with sliding modes. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **22**(2):212–222 (1977)
- [87] Utkin, V.I. *Sliding Modes in Control Optimization*. Communications and Control Engineering (Springer, 1992)
- [88] Van der Schaft, A.J. & Schumacher, J.M. Complementarity modeling of hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(4):483–490 (1998)
- [89] Wang, K.W., Kim, Y.S. & Shea, D.B. Structural vibration control via electrorheological-fluid-based actuators with adaptive viscous and frictional damping. *Journal of Sound and Vibration*, **177**(2):227–237 (1994)
- [90] Wirnitzer, J. *Schwingungsreduktion flexibler Raumfahrtstrukturen mittels semi-aktiver Reibverbindungen*. Dissertation, Universität Stuttgart (2004)
- [91] Wißbrock, H. *Untersuchungen zur Fugendämpfung zusammengesetzter Bauteile*. Dissertation, Universität Hannover (1985)
- [92] Wriggers, P. *Computational Contact Mechanics* (Wiley, 2002)